3 1次不等式

例題 1　不等式の表し方

次の数量の間の大小関係を不等式で表せ．

(1)　xを5倍して7を引いた数は，xの2倍より大きい．

(2)　ある学生の3回のテストの点はa点，b点，c点で，その平均点はm点以下である．

解　(1)　大きい，小さいを表すときは，$>$，$<$を使う．$\boldsymbol{5x-7>2x}$

(2)　以上，以下を表すときは，$\geqq$，$\leqq$を使う．$\boldsymbol{\dfrac{a+b+c}{3}\leqq m}$

1　次の数量の間の大小関係を不等式で表せ．

(1)　xを2倍して5を足した数は，xの3倍より大きい．

(2)　aとbの和の4倍は，aからbの7倍を引いた数以上である．

(3)　1個agのせっけん20個をbgの箱に入れても，全体で1000gに満たない．

(4)　30kmの道のりを自転車で行くのに，毎時$a$kmの速さで走るとy時間以上かかる．

(5)　1個100円のかきと1個150円のりんごをそれぞれx個とy個買って，z円のケースに入れてもらったら，2500円以下におさまった．

例題 2　不等式の性質

$a>b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け．

(1)　$a-3$□$b-3$　　(2)　$\dfrac{a}{3}$□$\dfrac{b}{3}$　　(3)　$-2a$□$-2b$

解　(1)　両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない．$>$

(2)　両辺を同じ正の数で割っても，不等号の向きは変わらない．$>$

(3)　両辺に同じ負の数を掛けると，不等号の向きが変わる．$<$

2　$a<b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け．

(1)　$a+6$□$b+6$　　(2)　$a-10$□$b-10$

(3)　$-7a$□$-7b$　　(4)　$-2+5a$□$-2+5b$

(5)　$\dfrac{3+4a}{7}$□$\dfrac{3+4b}{7}$　　(6)　$\dfrac{5-2a}{3}$□$\dfrac{5-2b}{3}$

●ポイント

①　数量の間の大小関係を不等号を使って表した式を**不等式**といい，不等号の左側の部分を**左辺**，右側の部分を**右辺**といい，左辺と右辺を合わせて**両辺**という．

②　〔**不等式の性質**〕(1)　$A<B$ならば，$A+C<B+C$，$A-C<B-C$

(2)　$A<B$，$C>0$ならば，$AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

(3)　$A<B$，$C<0$ならば，$AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

3　$x>y$のとき，次の2式ではどちらが大きいか．

(1)　$\dfrac{x}{3}+8$，$\dfrac{y}{3}+8$　　(2)　$10-0.6x$，$10-0.6y$　　(3)　$\dfrac{7-x}{2}$，$\dfrac{7-y}{2}$

4　次のような大小関係があるとき，aとbの大小関係を不等号を使って表せ．

(1)　$a-4>b-4$　　(2)　$a+2<b+2$　　(3)　$-6a>-6b$

(4)　$9-4a<9-4b$　　(5)　$\dfrac{a}{5}+3<\dfrac{b}{5}+3$　　(6)　$6-\dfrac{a}{2}<6-\dfrac{b}{2}$

例題 3　基本的な不等式の解法

次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

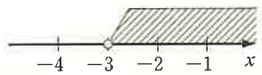
(1)　$x+8>5$　　(2)　$5x\leqq 15$　　(3)　$-\dfrac{x}{3}>2$

解　(1)　$x+8>5$

両辺から8を引く．

$x+8-8>5-8$

$\boldsymbol{x>-3}$



(2)　$5x\leqq 15$

両辺を5で割る．

$\dfrac{5x}{5}\leqq\dfrac{15}{5}$

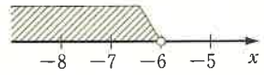
$\boldsymbol{x\leqq 3}$

(3)　$-\dfrac{x}{3}>2$

両辺に-3を掛ける．

$-\dfrac{x}{3}\times(-3)<2\times(-3)$

$\boldsymbol{x<-6}$



5　次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

(1)　$x+3>7$　　(2)　$x-1.7<1.8$　　(3)　$-9+x\geqq -3$

6　次の不等式を解け．

(1)　$x+2<1$　　(2)　$x-8\leqq 5$　　(3)　$x+\dfrac{2}{3}>\dfrac{5}{6}$

(4)　$-2.5+x\geqq 0.5$　　(5)　$9x<27$　　(6)　$-8x\leqq 32$

(7)　$-7x>-63$　　(8)　$13x\leqq -169$　　(9)　$-15x<-24$

7　次の不等式を解け．

(1)　$\dfrac{x}{4}>3$　　(2)　$-\dfrac{x}{2}<5$　　(3)　$-\dfrac{x}{7}\geqq -4$

(4)　$\dfrac{1}{4}x\leqq -2$　　(5)　$-\dfrac{3}{8}x\leqq\dfrac{5}{12}$　　(6)　$-\dfrac{2}{9}x>-\dfrac{16}{27}$

●ポイント

①　不等式のすべての解を求めることを，その不等式を**解く**という．

②　不等式を解くには，不等式の性質を利用して，左辺をxだけにする．

③　不等式の両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりすると，不等号の向きが変わる．

④　不等式の解の集合を数直線上に表すとき，aを含まない場合($x>a$，$x<a$の場合)はaの点を「○」で，aを含む場合($x\geqq a$，$x\leqq a$の場合)はaの点を「●」で表す．

例題 4　1次不等式の解法

次の1次不等式を解け．

(1)　$5x-2>3x+4$

(2)　$2(x+4)-5x\leqq 14$

解　(1)

$5x-2>3x+4$　移項する．

$5x-3x>4+2$　両辺を整理する．

$2x>6$　両辺を2で割る．

$x>3$

(2)

$2(x+4)-5x\leqq 14$　かっこをはずす．

$2x+8-5x\leqq 14$　移項する．

$2x-5x\leqq 14-8$　両辺を整理する．

$-3x\leqq 6$　両辺を -3 で割る．不等号の向きが変わる．

$x\geqq -2$

8　次の1次不等式を解け．

(1)　$4x-8>2x$

(2)　$12-3x\leqq 4x$

(3)　$5-3x\leqq 7-10x$

(4)　$7x-30<10x-9$

(5)　$25x-38\geqq 49x-18$

(6)　$65+36x<11+27x$

(7)　$12x+11<20x-7$

(8)　$200-5x\geqq 3x+64$

(9)　$5(3x-2)<-1$

(10)　$2x-(5x+3)+12\geqq 0$

(11)　$29-7(8-3x)\leqq 18x$

(12)　$3(x-2)>4(x+1)-5$

(13)　$2(x-2)>3(4-x)+4$

(14)　$3(2x-3)-2(1+5x)\geqq 13$

(15)　$4(2x-5)-3x>2-2(x-3)$

(16)　$8x-2(3x+5)\leqq 3x-2(x-10)$

9　次の1次不等式を解け．

(1)　$2.1-x>0.5x$

(2)　$0.4x-1.1<0.7x+3.1$

(3)　$0.45x-0.36<0.38x+0.27$

(4)　$0.11x+0.4\geqq 0.96+0.2x$

(5)　$3.2x+4.2\geqq 2(x-0.6)+1.8$

(6)　$0.3(4x+0.6)<1.5x+0.63$

(7)　$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}x\leqq\frac{1}{3}x$

(8)　$\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}>\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

(9)　$3-\frac{5x-1}{3}>2x+1$

(10)　$\frac{3x+1}{2}>\frac{2x-3}{5}$

(11)　$\frac{3}{4}x<\frac{2x-1}{2}+\frac{3}{4}$

(12)　$\frac{-4x+1}{2}-\frac{x}{6}\geqq\frac{3x-1}{4}+\frac{9}{2}$

●ポイント

①　$ax+b>0$ のように，移項して整理すると左辺が x の1次式になる不等式を**1次不等式**という．

②　不等式の両辺に同じ数を足しても，両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない．よって，不等式も方程式の場合と同じように移項ができる．

③　両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりするときは，不等号の向きに注意する．

④　小数を含む不等式は，両辺に10，100などを掛けて，係数を整数にする．

⑤　分数を含む不等式は，両辺に分母の最小公倍数を掛けて，分母をはらう．

10　次の問いに答えよ．

(1)　不等式 $2(3x+2)+a>9x$ の解が $x<3$ のとき，a の値を求めよ．

(2)　x についての方程式 $7x-2(x-a)=8$ の解が正になるような a の値の範囲を求めよ．

例題 5　1次不等式の応用

1冊110円のノートと1冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を1000円以下にしたい．1冊110円のノートをできるだけ多く買うには，それぞれ何冊買えばよいか．

解　110円のノートを x 冊買うとすると，80円のノートは $(10-x)$ 冊買うことになる．

よって，不等式は，$110x+80(10-x)\leqq 1000$　これを解くと，$x\leqq 6\frac{2}{3}$

$6\frac{2}{3}$ 以下の最大の自然数は6であるから，110円のノートは**6冊**

$10-6=4$ であるから，80円のノートは**4冊**

11　次の問いに答えよ．

(1)　1個の値段がそれぞれ160円，120円のりんごとみかんを合わせて15個入れた果物かごを作る．かご代150円を含めて，代金の合計が2400円をこえないようにしたい．りんごをできるだけ多く入れるとすると，それぞれ何個入れればよいか．

(2)　野球選手カードをAは46枚，Bは14枚持っている．AがBに何枚かあげても，Aの残りの枚数がBの枚数の2倍より多くなるようにしたい．AはBに何枚まであげられるか．

12　次の問いに答えよ．

(1)　A店では，定価が1個800円のある商品を10％引きで売っている．B店では，同じ商品を1ダースまでは定価どおりの800円で，それをこえた分は1個につき定価の17％引きで売っている．この商品を何個以上買うと，B店で買う方がA店で買うより安くなるか．

(2)　5％の食塩水と8％の食塩水がある．5％の食塩水800gと8％の食塩水を何gか混ぜ合わせて6％以上の食塩水を作りたい．8％の食塩水を何g以上混ぜればよいか．

13　次の問いに答えよ．

(1)　A地から15km離れたB地まで歩いた．はじめは平らな道を毎時5km，途中から上り坂を毎時3kmの速さで歩いた．所要時間が4時間以内のとき，平らな道は何km以上あったか．

(2)　ある美術館の入館料は1人700円で，30人以上の団体は2割引きとなる．この美術館に30人に満たない団体が入館するとき，30人の団体扱いとして入館する方が，通常の料金で入館するより安くなるのは，人数が何人以上のときか．

●ポイント

①　問題に述べられた関係から不等式をつくって解き，解の中から条件に合うものを選択する．

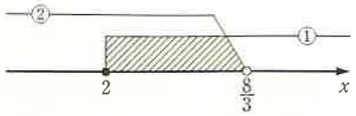
例題 6　連立不等式

連立不等式 $\begin{cases} 2x-1\geqq 3 \\ 3x+4<12 \end{cases}$ を解け．

解　$2x-1\geqq 3$ を解いて，$x\geqq 2$ ……①

$3x+4<12$ を解いて，$x<\frac{8}{3}$ ……②

①，②の共通部分をとって，$\boldsymbol{2\leqq x<\frac{8}{3}}$



14　次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x-3<5 \\ 3x+2\geqq 8 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+1\geqq 2x-3 \\ 4x-3>7x-9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7(x+2)>4x+5 \\ 3(2x+1)\geqq 4x+7 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x+1\leqq 5(x-1) \\ 5(x-2)+1\leqq 3(x+1) \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 0.2x-1<0.7x-2 \\ 2.3x-1.4<0.7(2x+7) \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 0.25x-0.18\geqq 0.6-0.14x \\ 3x+1\geqq 5x-1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \frac{8x+12}{7}<x+\frac{3}{2} \\ 5-6x>-x-5 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} \frac{11}{4}x-\frac{3}{2}>2x-5 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\leqq -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$

15　次の不等式を解け．

(1) $3x+1<x-3<4x+9$　　(2) $3(x-1)-1<5(x+1)-6<2(x-2)+5$

16　次の問いに答えよ．

(1)　１冊120円のノートと１冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を900円以上1000円以下にしたい．１冊120円のノートは何冊以上何冊以下買えばよいか．

(2)　A地から20km離れたB地まで歩いた．はじめは時速６km，途中から時速５kmで歩くと，３時間30分以上３時間40分以下で着いた．時速６kmで歩いた道のりは何km以上何km以下か．

(3)　ある店では，商品に原価の25％の利益を見込んで定価をつける．定価から300円値引きして売っても，なお原価の10％以上15％以下の利益が得られるのは，原価がどのような範囲のときか．

17　x についての連立不等式 $\begin{cases} 4x-5\leqq 9+2x \\ 3x-2\leqq 6x-a \end{cases}$ を満たす整数 x の個数が５個となるような a の値の範囲を定めよ．

●ポイント

①　２つ以上の不等式を組み合わせたものを**連立不等式**という．

②　連立不等式を解くには，それぞれの不等式を解いて，それらの解の共通の範囲を求める．

③　連立不等式は必ず解をもつとは限らない．

④　$A<B<C$ のとき，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ が同時に成り立つので，これを連立不等式として解けばよい．

例題 7　絶対値を含む方程式

次の方程式を解け．

(1)　$|x-1|=3$　　(2)　$|x+1|=2x$

解　(1)　(i)　$x\geqq 1$ のとき，$x-1=3$ より，$x=4$

(ii)　$x<1$ のとき，$-(x-1)=3$ より，$x=-2$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 4}$

〔別解〕　$|(\quad)|=a$（a は定数，$a>0$）は，$(\quad)=\pm a$ として解くこともできる．

(2)　(i)　$x\geqq -1$ のとき，$x+1=2x$ より，$x=1$　これは $x\geqq -1$ に適する．

(ii)　$x<-1$ のとき，$-(x+1)=2x$ より，$x=-\frac{1}{3}$　これは $x<-1$ に適さない．

よって，$\boldsymbol{x=1}$

18　次の方程式を解け．

(1)　$|x|=2$　　(2)　$|x+1|=4$　　(3)　$|x-3|=8$

(4)　$|3x-2|=6$　　(5)　$|2x-1|-6=5$　　(6)　$3|x-1|+5=7$

19　次の方程式を解け．

(1)　$|x+5|=2x$　　(2)　$|x-1|=2x+1$　　(3)　$|3x-4|=x+8$

例題 8　絶対値を含む不等式

次の不等式を解け．

(1)　$|x+1|<4$　　(2)　$|x+2|>2x$

解　(1)　与えられた不等式は，$-4<x+1<4$ と同じである．

$-4<x+1$ より，$x>-5$　$x+1<4$ より，$x<3$

よって，$\boldsymbol{-5<x<3}$

〔注〕　$|(\quad)|<a \Longleftrightarrow -a<(\quad)<a$，$|(\quad)|>a \Longleftrightarrow (\quad)>a$，$(\quad)<-a$

ただし，a は定数で，$a>0$

(2)　$x\geqq -2$ のとき，$x+2>2x$ より，$x<2$　よって，$-2\leqq x<2$ ……①

$x<-2$ のとき，$-(x+2)>2x$ より，$x<-\frac{2}{3}$　よって，$x<-2$ ……②

①，②のどちらかを満たしていればよいから，$\boldsymbol{x<2}$

20　次の不等式を解け．

(1)　$|x|\leqq 5$　　(2)　$|x+2|<3$　　(3)　$|x-1|\geqq 2$

(4)　$|2x+1|<4$　　(5)　$|3-x|+2>7$　　(6)　$2|5x-2|-5\leqq 3$

21　次の不等式を解け．

(1)　$|x+6|>3x$　　(2)　$|2x-1|\leqq x+2$　　(3)　$x+|x+1|>4x-3$

●ポイント

①　絶対値を含む方程式，不等式では，絶対値記号をはずして解いた解のうち，適するものを選ぶ．

混合問題

A

1 次の1次不等式を解け．

(1) $3x+11<x-3$　　(2) $2x-9\geqq 7x-34$

(3) $9-(x-1)\geqq 3(2-x)$　　(4) $0.75x-0.3>1.21x+1.08$

(5) $\frac{4}{5}x+3\leqq\frac{1}{2}(3x-1)+7$　　(6) $\frac{3x-1}{4}<\frac{2-5x}{3}+\frac{1}{6}$

2 次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases}3x-6<4x-2\\0.2(x+6)\geqq 1.2x+3.2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4(x+2)\leqq 5x+9\\\frac{11}{12}-\frac{1}{4}x<\frac{1}{3}\end{cases}$

(3) $2x+1<\frac{x}{3}-1<x+2$　　(4) $\frac{x-1}{3}-1<\frac{5x-4}{6}-\frac{1}{2}<\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}$

3 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|5x-6|=14$　　(2) $|2x-1|=x+3$

(3) $2|3x-1|\geqq 5$　　(4) $|3x+2|<-x$

4 ワイングラスを1個240円で何個か仕入れ，これを1個400円で売ったとき，そのうち20個が割れても15000円以上の利益が上がるようにしたい．ワイングラスを何個以上仕入れればよいか．

B

5 xについての連立不等式 $\begin{cases}2x-5>x-a\\3(x+a)>7x-2\end{cases}$ を解け．

6 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-2|+|2x-1|=5x$　　(2) $2|x|+1\leqq|x+3|+3x$

7 倉庫の中に同じ大きさの商品が320個入っている．この商品を，50個まで積めるトラックAと，35個まで積めるトラックBを合わせて8台使って全部運び出したい．トラック1台の運賃は，A，Bそれぞれ15000円，10000円である．運賃の合計を100000円未満にするとき，次の問いに答えよ．

(1) トラックA，トラックBはそれぞれ何台使うことになるか．

(2) 運賃の合計は何円になるか．

■ヒント

5 aの値によって，解をもつ場合ともたない場合がある．

6 (1) $x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqq x<2$，$x\geqq 2$ の3つの場合に分けて考える．

4 集合と命題

例題 1　集合と要素

正の偶数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 2□A　　(2) 3□A

解 (1) **2∈A**　(2) **3∉A**

1 正の奇数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 7□A　(2) 8□A　(3) 12□A　(4) 13□A

2 6の正の約数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 2□A　(2) 3□A　(3) 4□A　(4) 5□A

例題 2　集合の表し方

次の問いに答えよ．

(1) 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

① 9の正の約数全体の集合　　② $\{x\mid x$は40以下の自然数で8の倍数$\}$

(2) 集合$\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 100\}$を，要素の条件を述べる方法で表せ．

解 (1) ① **$\{1,\ 3,\ 9\}$**　② **$\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40\}$**

(2) **$\{x\mid x$は100以下の正の偶数$\}$**　〔別解〕 **$\{2x\mid x$は整数，$1\leqq x\leqq 50\}$**

3 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) 50以下の正の整数で11の倍数全体の集合

(2) 48の正の約数全体の集合

(3) 300以下の自然数で，4で割ると2余る数全体の集合

(4) $\{x\mid x$は正の整数で5の倍数$\}$

(5) $\{n\mid n=2m,\ m$は自然数，$m\leqq 5\}$

(6) $\{2n-1\mid n$は自然数$\}$

4 次の集合を，要素の条件を述べる方法で表せ．

(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$　　(2) $\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots\}$

(3) $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\ 99\}$　　(4) $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

●ポイント

① ある条件を満たすものの集まりを**集合**といい，集合に含まれる1つ1つのものをその集合の**要素**という．aが集合Aの要素であるとき，aは集合Aに**属する**といい，$a\in A$または$A\ni a$と表す．

② 集合の表し方には，$\{○,\ ○,\ \cdots\cdots,\ ○\}$のように要素を書き並べる方法と，$\{x\mid$ xの満たす条件 $\}$のように要素の条件を述べる方法がある．

例題 3　部分集合

次の集合A，Bの関係を，記号$\subset$を用いて表せ．

(1)　$A=\{n|\,n$は正の偶数$\}$，$B=\{n|\,n$は自然数$\}$

(2)　$A=\{n|\,n$は正の奇数$\}$，$B=\{n|\,n$は2より大きい素数$\}$

解　(1)　$\boldsymbol{A\subset B}$　　(2)　$\boldsymbol{B\subset A}$

5　次の集合A，Bの関係を，記号$\subset$，$=$を用いて表せ．

(1)　$A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{n|\,n$は36の正の約数$\}$

(2)　$A=\{2n|\,n$は自然数$\}$，$B=\{6n|\,n$は自然数$\}$

(3)　$A=\{3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{3n|n=1,\ 2,\ 3\}$

(4)　$A=\{n|\,n$は16の正の約数$\}$，$B=\{2^n|\,n$は整数，$1\leqq n\leqq 4\}$

例題 4　共通部分と和集合

2つの集合$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$について，$A\cap B$と$A\cup B$を求めよ．

解　$A\cap B$は，AとBのどちらにも含まれる要素全体の集合だから，$A\cap B=\{\mathbf{2,\ 4}\}$

$A\cup B$は，AとBの要素をすべて集めた集合だから，$A\cup B=\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8}\}$

6　集合$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$，$B=\{2,\ 4,\ 5,\ 8\}$，$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$について，次の集合を，要素を書き並べて表せ．

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$A\cap C$

(4)　$B\cap C$　　(5)　$A\cap B\cap C$　　(6)　$A\cup B\cup C$

7　集合U，A，B，Cを次のように定めるとき，(1)〜(3)の集合を，要素を書き並べて表せ．

$U=\{n|\,n$は10以下の自然数$\}$，$A=\{2n|n\in U\}$，$B=\{3n|n\in U\}$，$C=\{n|\,n$は正の奇数$\}$

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$B\cap C$

8　$A=\{x|x\leqq -1\}$，$B=\{x|-3<x<2\}$とするとき，$A\cap B$，$A\cup B$を求めよ．

●ポイント

①　集合Aのすべての要素が集合Bの要素になっているとき，AはBに**含まれる**，あるいは，BはAを**含む**といい，$\boldsymbol{A\subset B}$または$\boldsymbol{B\supset A}$と表す．このとき，AはBの**部分集合**であるという．

②　$A\subset B$かつ$B\subset A$のとき，AとBは**等しい**といい，$\boldsymbol{A=B}$と表す．また，$A\subset B$かつ$A\neq B$であるとき，AはBの**真部分集合**であるという．

③　$\boldsymbol{A\cap B}$はAとBの**共通部分**，$\boldsymbol{A\cup B}$はAとBの**和集合**を表す．

④　不等式の解は，不等式を満たすxの値全体をさすので，集合ととらえることができる．
　不等式の解となる集合A，Bについて，$A\cap B$は連立不等式の解となる集合である．不等式の解となる集合を考えるときは，数直線を用いて考えるとよい．

例題 5　空集合と補集合

$U=\{x|\,x$は10以下の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9\}$とする．

(1)　集合Aの部分集合をすべて書け．

(2)　集合Aの補集合$\overline{A}$を求めよ．

(3)　集合$\overline{A}\cap B$を求めよ．

解　(1)　空集合，要素が1個のもの，2個のもの，3個のもの，4個のものの順に書くと，

$\boldsymbol{\phi}$，$\{\mathbf{1}\}$，$\{\mathbf{2}\}$，$\{\mathbf{3}\}$，$\{\mathbf{4}\}$，$\{\mathbf{1,\ 2}\}$，$\{\mathbf{1,\ 3}\}$，$\{\mathbf{1,\ 4}\}$，$\{\mathbf{2,\ 3}\}$，$\{\mathbf{2,\ 4}\}$，$\{\mathbf{3,\ 4}\}$，

$\{\mathbf{1,\ 2,\ 3}\}$，$\{\mathbf{1,\ 2,\ 4}\}$，$\{\mathbf{1,\ 3,\ 4}\}$，$\{\mathbf{2,\ 3,\ 4}\}$，$\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4}\}$

(2)　$\overline{A}=\{\mathbf{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}\}$　　(3)　$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{6,\ 9}\}$

9　次の集合の部分集合をすべて書け．

(1)　$A=\{3,\ 5,\ 7\}$　　(2)　$A=\{n|\,n$は15の正の約数$\}$

(3)　$A=\{n|\,n$は10以上20以下の整数で，5で割ると1余る数$\}$

10　$U=\{x|\,x$は15以上20以下の整数$\}$を全体集合とし，$A=\{x|\,x$は3の倍数，$x\in U\}$，$B=\{x|\,x$は5の倍数，$x\in U\}$とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1)　A　　(2)　B　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$\overline{B}$

(5)　$\overline{A}\cup B$　　(6)　$\overline{A}\cap B$　　(7)　$A\cup\overline{B}$　　(8)　$A\cap\overline{B}$

11　$A=\{x|1\leqq x\leqq 5\}$，$B=\{x|x<-2,\ 3<x\}$とするとき，次の集合を求めよ．

(1)　$\overline{A}$　　(2)　$\overline{B}$　　(3)　$\overline{A}\cap B$　　(4)　$A\cup\overline{B}$

例題 6　ド・モルガンの法則

$U=\{x|\,x$は10以下の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$とするとき，次の集合を求めよ．

(1)　$A\cup B$　　(2)　$A\cap B$　　(3)　$\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

解　(1)　$A\cup B=\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10}\}$　　(2)　$A\cap B=\{\mathbf{2,\ 5}\}$

(3)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{\mathbf{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}\}$

(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{\mathbf{4,\ 6,\ 8,\ 9}\}$

●ポイント

①　要素を1つももたない集合を**空集合**といい，ϕで表す．ϕは，すべての集合の部分集合と考える．

②　集合を考えるときは，最初に1つの集合Uを決めて，その部分集合について考えることが多い．このとき，Uを**全体集合**という．

③　全体集合をU，その部分集合をAとするとき，Uの要素であってAの要素でないもの全体の集合をAの**補集合**といい，$\overline{A}$で表す．また，$A\cap\overline{A}=\phi$，$A\cup\overline{A}=U$，$\overline{\overline{A}}=A$が成り立つ．
　$\overline{\overline{A}}$は$\overline{A}$の補集合である．

④　〔**ド・モルガンの法則**〕　$\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$，$\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$　　「線が切れれば，向きが変わる」

12 $U=\{x \mid x$ は10以下の自然数$\}$ を全体集合とし，$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9\}$ とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $A\cup B$　(2) $A\cap B$　(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{B}$　(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(6) $\overline{A}\cap\overline{B}$

13 $U=\{x \mid x$ は10以上20以下の整数$\}$ を全体集合とし，$A=\{x \mid x$ は偶数，$x\in U\}$，$B=\{x \mid x$ は3の倍数，$x\in U\}$ とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $A\cap B$　(2) $\overline{A}$　(3) $\overline{A}\cap B$

(4) $A\cap\overline{B}$　(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(6) $\overline{A}\cap\overline{B}$

14 $U=\{n \mid n$ は12以下の自然数$\}$ を全体集合とし，Uの部分集合A，B，Cを，$A=\{n \mid n$ は奇数，$n\in U\}$，$B=\{n \mid n$ は3の倍数，$n\in U\}$，$C=\{n \mid n$ は素数，$n\in U\}$ とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$　(2) $\overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C})$

15 全体集合を $U=\{x \mid -5<x<5\}$ とする．Uの部分集合A，Bを，$A=\{x \mid -3\leqq x\leqq 1\}$，$B=\{x \mid -5<x<-1,\ 3<x<5\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　(2) $A\cup B$　(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{A}\cap B$　(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(6) $\overline{A}\cap\overline{B}$

例題 7　集合の要素の個数

全体集合Uを50以下の自然数の集合とし，$A=\{x \mid x$ は偶数，$x\in U\}$，$B=\{x \mid x$ は3の倍数，$x\in U\}$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A)$　(2) $n(B)$　(3) $n(A\cap B)$　(4) $n(\overline{A})$　(5) $n(A\cup B)$

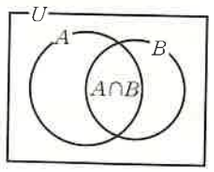
解 (1) $50\div 2=25$　よって，$n(A)=\mathbf{25}$

(2) $50\div 3=16$余り2　よって，$n(B)=\mathbf{16}$

(3) $A\cap B$ は，偶数でかつ3の倍数の集合だから，6の倍数の集合である．$50\div 6=8$余り2　よって，$n(A\cap B)=8$

(4) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=50-25=\mathbf{25}$

(5) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=25+16-8=\mathbf{33}$



16 $U=\{x \mid x$ は100以下の自然数$\}$ を全体集合とし，$A=\{x \mid x$ は偶数，$x\in U\}$，$B=\{x \mid x$ は3の倍数，$x\in U\}$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A)$　(2) $n(B)$　(3) $n(A\cap B)$　(4) $n(\overline{A})$

(5) $n(\overline{B})$　(6) $n(A\cup B)$　(7) $n(\overline{A}\cup\overline{B})$　(8) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

●ポイント

① Aが有限集合のとき，Aに属する**要素の個数**を記号 $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．

② $\boldsymbol{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$，$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

〔注〕 集合の要素の個数について，詳細は数学Aで学習する．

例題 8　命題の真偽

次の命題の真偽を判定せよ．

(1) 4は偶数である．

(2) $x^2=4$ ならば $x=2$ である．

解 (1) **真**　(2) **偽**

17 次の命題の真偽を判定せよ．

(1) 9は偶数である．

(2) $x=2$ ならば $x^2=4$ である．

(3) a，b が奇数ならば $a+b$ も奇数である．

(4) 正方形は長方形である．

例題 9　反例

次の命題の真偽を判定し，偽のものは反例を1つあげよ．

(1) $a>0,\ ab>0 \Longrightarrow b>0$

(2) $x<1 \Longrightarrow x^2<1$

(3) n は素数 $\Longrightarrow n$ は奇数

(4) 四角形ABCDは正方形 $\Longrightarrow$ 四角形ABCDはひし形

解 (1) $ab>0$ より，a と b は同符号で，$a>0$ だから，$b>0$ となる．よって，**真**

(2) **偽**　反例　$\boldsymbol{x=-2}$

(3) **偽**　反例　$\boldsymbol{n=2}$

(4) 正方形の4つの辺の長さは等しいから，ひし形である．**真**

18 次の命題の真偽を判定し，偽のものは反例を1つあげよ．

(1) n は10の倍数 $\Longrightarrow n$ は5の倍数

(2) $a+b>2,\ ab>1 \Longrightarrow a>1,\ b>1$

(3) △ABCは二等辺三角形 $\Longrightarrow$ △ABCは正三角形

(4) 四角形ABCDの対角線の長さが等しい $\Longrightarrow$ 四角形ABCDは長方形

(5) $x<0,\ y<0 \Longrightarrow xy>0$

(6) $a>b \Longrightarrow a^2>b^2$

●ポイント

① 正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という．命題が正しいとき，その命題は**真**であるといい，正しくないとき，その命題は**偽**であるという．命題「p ならば q」が偽であるとき，p を満たすが q を満たさない例を，この命題の**反例**という．

② 命題「p ならば q」を $\boldsymbol{p\Longrightarrow q}$ とも書く．このとき，p をこの命題の**仮定**，q を**結論**という．

例題 10　真偽と集合

集合を用いて，次の命題の真偽を判定せよ．

(1)　$x<1 \Longrightarrow x<2$

(2)　n は3で割り切れる自然数 $\Longrightarrow$ n は6で割り切れる自然数

解　(1)　$P=\{x|x<1\}$，$Q=\{x|x<2\}$ とする．

$P\subset Q$ だから，命題は**真**である．

(2)　$P=\{n|n$ は3で割り切れる自然数$\}$，$Q=\{n|n$ は6で割り切れる自然数$\}$ とする．

$P=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots\}$，$Q=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots\cdots\}$ より，$P\subset Q$ でないから，命題は**偽**である．

19　集合を用いて，次の命題の真偽を判定せよ．

(1)　$1<x<2 \Longrightarrow x<3$

(2)　$x\geqq -1 \Longrightarrow 0\leqq x\leqq 4$

(3)　n は24の正の約数 $\Longrightarrow$ n は12の正の約数

(4)　n は4で割ると1余る自然数 $\Longrightarrow$ n は正の奇数

例題 11　必要条件と十分条件

次の□に(ア)必要条件，(イ)十分条件，(ウ)必要十分条件，(エ)必要条件でも十分条件でもないのうち，適当なものを選んで記号を書け．

(1)　$x=3$ は $x^2=9$ であるための□

(2)　$x^2+y^2=0$ は $x=y=0$ であるための□

(3)　$x\neq 0$ は $(x-1)(x-2)=0$ であるための□

(4)　$x^2=x$ は $x^2-1=0$ であるための□

解　(1)　$x=3$ ならば $x^2=9$ である．

$x^2=9$ ならば $x=\pm 3$ で $x=3$ とは限らない．したがって，十分条件　(イ)

(2)　つねに $x^2\geqq 0$，$y^2\geqq 0$ が成り立つから，$x^2+y^2=0$ ならば $x=y=0$ である．

また，$x=y=0$ ならば $x^2+y^2=0$ である．したがって，必要十分条件　(ウ)

(3)　$x\neq 0$ であっても $x=1$，$x=2$ とは限らない．$x=1$，$x=2$ は明らかに $x\neq 0$ である．したがって，必要条件　(ア)

(4)　$x^2=x$ ならば $x=0$，$x=1$ で $x^2-1=0$ とは限らない．$x^2-1=0$ ならば $x=\pm 1$ で $x^2=x$ とは限らない．したがって，必要条件でも十分条件でもない．(エ)

●ポイント

①　条件 p，q を満たす要素全体の集合をそれぞれ P，Q とするとき，$p \Longrightarrow q$ が真であることは，$P\subset Q$ が成り立つことと同じで，偽であることは，$P\subset Q$ が成り立たないことと同じである．

②　「$p \Longrightarrow q$」が真のとき，p は q であるための**十分条件**，q は p であるための**必要条件**である．

③　「$p \Longrightarrow q$」と「$q \Longrightarrow p$」がともに真のとき，すなわち「$p \Longleftrightarrow q$」のとき，p は q であるための**必要十分条件**であり，q は p であるための必要十分条件でもある．このとき，p と q は互いに**同値**であるともいう．

④　$p \Longleftrightarrow q$ のとき，条件 p，q を満たす要素全体の集合をそれぞれ P，Q とすると，$P=Q$ である．

20　次の条件 p，q について，p は q であるための，必要条件か，十分条件か，必要十分条件か．

(1)　$p：x=2$，$q：x^2=4$

(2)　$p：x\geqq 2$，$q：x>2$

(3)　p：四角形ABCDは正方形，q：四角形ABCDは長方形

(4)　p：△ABCは二等辺三角形，q：△ABCは正三角形

(5)　p：自然数 a，b はともに奇数，q：自然数 a，b の積は奇数

21　次の□に(ア)必要条件，(イ)十分条件，(ウ)必要十分条件，(エ)必要条件でも十分条件でもない　のうち，適当なものを選んで記号を書け．

(1)　$x^2=2x$ は $x=2$ であるための□

(2)　$x\geqq 0$，$y\leqq 0$ は $xy\leqq 0$ であるための□

(3)　$a+b=0$，$ab=0$ は $a=0$，$b=0$ であるための□

(4)　$a=b$ は $a^2=b^2$ であるための□

(5)　四角形のすべての角が90°であることは，その四角形が正方形であるための□

(6)　$x>3$ は $1<x<4$ であるための□

(7)　$(a-b)(b-c)=0$ は $a=b=c$ であるための□

(8)　$ab=0$ かつ $a+b\neq 0$ は $a\neq 0$ または $b\neq 0$ であるための□

(9)　△ABCが二等辺三角形であることは，∠A＝∠B であるための□

(10)　四角形が平行四辺形であることは，対角線がそれぞれの中点で交わるための□

例題 12　条件の否定

次の条件の否定をつくれ．ただし，(3)において，n は整数とする．

(1)　$x=1$　　(2)　$x>1$　　(3)　n は偶数である．

解　(1)「＝」を否定して，「≠」とする．→ $\boldsymbol{x\neq 1}$

(2)「＞」を否定して，「≦」とする．→ $\boldsymbol{x\leqq 1}$

(3)「偶数」を否定して，「奇数」とする．→ **n は奇数である．**

22　次の条件の否定をつくれ．ただし，(6)において，n は整数とする．

(1)　$x=2$　　(2)　$x+y\neq 0$

(3)　$x\geqq 2$　　(4)　$x+y<0$

(5)　x は無理数である．　　(6)　n は0以上の整数である．

●ポイント

①　条件 p に対して，「p でない」という条件を p の**否定**といい，$\overline{p}$ で表す．

②　「＝」の否定は「≠」，「＜」「≦」の否定はそれぞれ「≧」「＞」となる．

③　否定の意味より，$\overline{\overline{p}}=p$ が成り立つから，条件 $\overline{p}$ の否定は p である．

例題 13 「かつ」「または」の否定

次の条件の否定をつくれ．

(1) $x=1$ かつ $y=2$　　(2) $x<1$ または $y>2$　　(3) $1<x<2$

解 (1) **$x\neq 1$ または $y\neq 2$**

(2) **$x\geqq 1$ かつ $y\leqq 2$**

(3) $1<x<2$ は「$x>1$ かつ $x<2$」だから，否定は，**$x\leqq 1$ または $2\leqq x$**

23 次の条件の否定をつくれ．

(1) $x\neq -2$ かつ $y\neq -1$

(2) $x<-3$ かつ $y<3$

(3) $x=-2$ または $x=1$

(4) $x<-2$ または $-1<x$

(5) $-4\leqq x\leqq -2$

例題 14 命題の否定

次の命題の否定をつくり，否定命題の真偽を判定せよ．

(1) すべての実数 x について，$x^2\geqq 0$ である．

(2) ある実数 x について，$x^2=2$ である．

(3) 任意の実数 x に対し，$x^2+2x+1>0$ である．

(4) $n+2$，$n+3$ がともに素数となる自然数 n が存在する．

解 (1) **ある実数 x について，$x^2<0$ である．偽**

(2) **すべての実数 x について，$x^2\neq 2$ である．偽**

(3) **ある実数 x に対し，$x^2+2x+1\leqq 0$ である．真**

(4) **すべての自然数 n について，$n+2$ または $n+3$ は素数ではない．真**

24 次の命題の否定をつくり，その真偽を判定せよ．

(1) すべての実数 x について，$(x+1)^2\geqq 0$ である．

(2) ある実数 x について，$x\geqq 1$ である．

(3) 任意の実数 x，y に対し，$x^2+y^2>0$ である．

(4) $x^2=2x$ である自然数 x が存在する．

(5) すべての素数の平方は奇数である．

(6) すべての実数 x に対し，$x^2+1>0$ である．

●ポイント

① 条件 p，q を満たす要素全体の集合をそれぞれ P，Q とすると，ド・モルガンの法則より，
$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$，$\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$ だから，
「$\overline{p\text{ かつ }q}$」$\Longleftrightarrow$「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」，「$\overline{p\text{ または }q}$」$\Longleftrightarrow$「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」 が成り立つ．

② 「ある x について y である」の否定は「すべての x について y ではない」であり，「すべての x について y である」の否定は「ある x について y ではない」である．

例題 15 命題の逆，裏，対偶

次の命題の逆，裏，対偶を書き，その真偽を判定せよ．

$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ ならば，$x+y\geqq 2$ である．

解 逆 **$x+y\geqq 2$ ならば，$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ である．偽** （反例 $x=3$，$y=0$）

裏 **$x<1$ または $y<1$ ならば，$x+y<2$ である．偽**

（逆と裏は対偶の関係にあり真偽は一致する．）

対偶 **$x+y<2$ ならば，$x<1$ または $y<1$ である．真**

25 次の命題の逆，裏，対偶を書き，その真偽を判定せよ．

(1) a，b がともに無理数ならば，$a+b$ は無理数である．

(2) 整数 n の平方が偶数ならば，n は偶数である．

(3) $xy=6$ ならば，$x=2$ かつ $y=3$ である．

(4) 2つの三角形の面積が等しければ，その2つの三角形は合同である．

(5) $abc<0$ ならば，a，b，c のうち少なくとも1つは負である．

例題 16 対偶を用いた証明

m，n を整数とするとき，mn が偶数ならば，m，n の少なくとも一方は偶数である．このことを証明せよ．

解 ある命題が直接証明しにくいときは，その対偶を証明してもよい．

対偶は「m，n がともに奇数ならば，mn は奇数である．」ことだから，

$m=2k+1$，$n=2l+1$ (k，l は整数)とおくと，

$mn=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1=2(2kl+k+l)+1$

より，mn は奇数．よって，mn が偶数ならば，m，n の少なくとも一方は偶数である．

〔注〕 対偶を証明することは，「結論を否定すると仮定に反する」ことを示す背理法と呼ばれる証明とほぼ同じであると考えてよい．

26 m，n を整数とするとき，mn が奇数ならば，m，n はともに奇数であることを証明せよ．

27 次の命題を証明せよ．

(1) x，y が実数のとき，$x^2+y^2=0$ ならば，$x=0$ かつ $y=0$ である．

(2) $xy\neq 8$ ならば，$x\neq 2$ または $y\neq 4$ である．

(3) $a^2>bc$ かつ $ac>b^2$ ならば，$a\neq b$ である．

●ポイント

① 「$p\Longrightarrow q$」という命題が与えられたとき，逆は，「$q\Longrightarrow p$」 裏は，「$\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$」 対偶は，「$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$」の形となる．命題が真であっても，その逆は真とは限らない．

② 命題と対偶の真偽，逆と裏の真偽は，それぞれ一致する．

③ 命題が直接証明しにくい場合は，対偶を考えた方が簡単な場合がある．

例題 17　背理法

次のことを証明せよ．

(1)　x が無理数ならば，$x+5$ も無理数である．

(2)　a，b，c が整数であるとき，$a^2+b^2=c^2$ ならば，a，b，c のうち少なくとも1つは偶数である．

解　(1)　x が無理数で，$x+5$ が a という有理数であるとすると，$x=a-5$ より，x は有理数となる．これは，x が無理数であることに矛盾する．よって，$x+5$ は無理数である．

(2)　a，b，c がすべて奇数であるとする．$a=2l+1$，$b=2m+1$，$c=2n+1$ (l，m，n は整数)とおくと，

$a^2+b^2=(2l+1)^2+(2m+1)^2=2(2l^2+2m^2+2l+2m+1)$ より，a^2+b^2 は偶数．

$c^2=(2n+1)^2=2(2n^2+2n)+1$ より，c^2 は奇数．

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する．

ゆえに，a，b，c のうち少なくとも1つは偶数である．

28　x が無理数ならば，$5x$ も無理数であることを，背理法を用いて証明せよ．

29　$abc\neq0$ かつ $a+b+c=0$ ならば，a，b，c のうち少なくとも1つは負の数であることを背理法を用いて証明せよ．

30　p，q を整数とする．p^2+q^2 が奇数ならば，p，q の一方は奇数で，他方は偶数であることを証明せよ．

31　次の問いに答えよ．

(1)　a，b，x，y を有理数とする．$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$a+b\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$ ならば，$a=x$，$b=y$ であることを，背理法を用いて証明せよ．

(2)　x，y を有理数とする．$(4x+y)\sqrt{2}+3x+2y=7\sqrt{2}+4$ のとき，x，y の値を求めよ．

32　直線 ℓ 上にない点Pを通り，直線 ℓ に平行な直線は1本だけであることを，背理法を用いて証明せよ．

33　△ABCにおいて，AB<AC ならば，∠Cは鋭角であることを，背理法を用いて証明せよ．

●ポイント

①　**背理法**では，結論を否定することにより，矛盾を導き出す．

混合問題

A

1　$A=\{x|-4<x<3\}$，$B=\{x|-7\leqq x\leqq 2\}$，$C=\{x|-1<x<5\}$ とするとき，$A\cap B\cap C$，$A\cup B\cup C$ を求めよ．

2　N を自然数全体の集合とする．全体集合を，$U=\{n|n\in N,\ 1\leqq n\leqq 16\}$ とし，U の部分集合 A，B，C を，$A=\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$，$B=\{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$，$C=\{2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ とする．次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1)　$B\cap C$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$A\cap\overline{C}$

(4)　$\overline{A}\cap\overline{C}$　　(5)　$A\cap(B\cup C)$　　(6)　$A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

3　次の□の中に，「必要」，「十分」，「必要十分」の中から適当なことばを入れよ．

(1)　四角形の対角線が直交することは，四角形がひし形であるための□条件

(2)　$x<0$ であることは，$x^2\neq0$ であるための□条件

(3)　$x+y=0$，$x-2y=0$ は，$x=0$，$y=0$ であるための□条件

(4)　△ABCが直角三角形であることは，$AB^2+BC^2=CA^2$ であるための□条件

4　次の条件の否定をつくれ．ただし，m，n は整数とする．

(1)　m，n はともに偶数　　(2)　m，n のうち少なくとも一方は偶数

5　次の命題の対偶を書き，真偽を判定せよ．

(1)　二等辺三角形は2つの角が等しい．　　(2)　$2a+b>4$ ならば，$a>1$ かつ $b>2$ である．

(3)　$x+y<0$ ならば，x，y のうち少なくとも一方は負である．

6　a，b が無理数ならば，$a+b$ と $a-b$ の少なくとも一方は無理数であることを証明せよ．

B

7　集合 $A=\{a,\ b,\ c\}$ がある．

(1)　A の部分集合は，空集合と A 自身も含めると，全部で8個ある．空集合および A 以外の6個の部分集合をすべて答えよ．

(2)　A の空集合を除く7個の部分集合から4個を選び出し，この4個の部分集合からなる集合 D を考える．このような D のうち，D に属するどの2つの部分集合の和集合および共通部分も再び D に属するようなものを求めよ．

8　A，B，C は自然数を要素とする集合で，A の任意の要素 a と B の任意の要素 b に対し，$a+b\in C$ が成り立つとする．このとき，C の要素がすべて奇数ならば，$A\cap B=\phi$ であることを証明せよ．

■ヒント

8　背理法を使う．結論を否定し，$A\cap B\neq\phi$ として矛盾を導く．

章末問題A

1 次の(1)〜(4)の式を展開し，(5)〜(8)の式を因数分解せよ．

(1) $(3x-4y)(4x+5y)$　　(2) $(x-2y+3z)(x+2y-3z)$

(3) $(x-10)(x+10)(x^2+100)$　　(4) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

(5) $(2x^2-3x)^2-11(2x^2-3x)+18$　　(6) $a^2+b^2-2bc+2ca-2ab$

(7) $2x^2-7xy+6y^2-5x+7y-3$　　(8) x^4+3x^2+4

2 $\sqrt{(2a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$ を簡単にせよ．

3 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2　　(4) x^3+y^3

4 次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 8(x-1)<5x+4 \\ 0.4x+1\leqq x+2.2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}\geqq\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2x-1}{3}\leqq\dfrac{7}{9}x+1 \end{cases}$

5 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x|+2|x-2|=5$　　(2) $3|x-3|\geqq 2x+1$

6 $U=\{x\mid x$ は自然数$\}$ を全体集合とし，$A=\{x\mid x$ は6と互いに素な数$\}$，$B=\{x\mid x$ は奇数$\}$ とする．ただし，「a は b と互いに素である」とは，a と b が1以外に公約数をもたないことである．

(1) A と B の包含関係をいえ．　　(2) $\overline{A}$ と $\overline{B}$ の包含関係をいえ．

7 $A=\{1,\ a+1,\ 2a+1\}$，$B=\{a,\ 2a,\ a+3\}$ とする．$A\cap B=\{a,\ 2\}$ のとき，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) a の値を求めよ．　　(2) $A\cup B$ を求めよ．

8 次の□の中に，「必要」，「十分」，「必要十分」の中から適当なことばを入れよ．

(1) $a^2+b^2=0$ であることは，$ab=0$ であるための□条件

(2) △ABCと△DEFで，2辺の比と1つの角が等しいことは，△ABC∽△DEF であるための□条件

(3) $a+b$，$b+c$，$c+a$ のいずれも0であることは，$a=b=c=0$ であるための□条件

9 x，y を実数とする．命題「xy が無理数ならば，x，y の少なくとも一方は無理数である．」の逆，裏，対偶を述べ，その真偽をいえ．また，もとの命題の真偽をいえ．

10 a，b が自然数で，a^2+b^2 が4の倍数ならば，a，b はともに偶数であることを証明せよ．

章末問題B

1 次の(1)の式を簡単にし，(2)，(3)の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b+c-d)^2+(a+b-c+d)^2-(a-b+c+d)^2-(-a+b+c+d)^2$

(2) $(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$

(3) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

2 $|a|<1$ かつ $|b|<1$ のとき，$|a+b|+|a-b|<2$ であることを証明せよ．

3 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき，$x^5+\dfrac{1}{x^5}$ の値を求めよ．

4 $x+y+z=3$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $(x-3)(y-3)(z-3)$　　(2) $x^3+y^3+z^3$

5 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2||x-4|+3x|>7x+4$ を解け．

(2) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}$ の二重根号をはずせ．ただし，$x\geqq -2$ とする．

6 ある正の数を x として $\dfrac{7}{5}(x+1)$ の値を計算し，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めたら，$1+2x$ に等しくなった．x の値を求めよ．

7 数直線上の集合 $A=\{x\mid 0\leqq x\leqq a\}$，$B=\{x\mid 1<x<5\}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は正の数とする．

(1) $A\cap B=\phi$ となるように a の値の範囲を定めよ．

(2) $A\cap B$ が整数を2つだけ含むように a の値の範囲を定めよ．

(3) $\overline{A}\subset\overline{B}$ となるように a の値の範囲を定めよ．

8 自然数を要素とする空集合でない集合 G が次の条件(ア)，(イ)を満たすとする．

(ア) $m\in G$，$n\in G$ ならば，$m+n\in G$

(イ) $m\in G$，$n\in G$，$m>n$ ならば，$m-n\in G$

このとき，G の最小の要素を d とすると，$G=\{kd\mid k$ は自然数$\}$ であることを証明せよ．

(i), (ii)より，$\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b|}$ が成り立つ．

ゆえに，$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\left|\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\frac{1}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$ となり，与えられた等式が成り立つ．

9 (1)±7　(2)±12　(3)$\pm\frac{4}{3}$　(4)$\pm\sqrt{15}$　(5)$\pm\sqrt{33}$　**10** $\sqrt{4^2}=4$，$\sqrt{(-5)^2}=5$，$(\sqrt{6})^2=6$

11 (1)$3\sqrt{3}$　(2)$2\sqrt{5}$　(3)$4\sqrt{2}$　(4)$5\sqrt{3}$　(5)$4\sqrt{7}$　**12** (1)$1-x$　(2)$x-1$

P15

13 (1)$5\sqrt{3}$　(2)$-\sqrt{2}$　(3)$11\sqrt{2}$　(4)$2\sqrt{3}$　(5)$14-8\sqrt{3}$　(6)$5\sqrt{6}$　(7)14

(8)与式$=\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{4\sqrt{6}}$

(9)与式$=\{(\sqrt{6}-\sqrt{3})-\sqrt{2}\}^2=(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2-2(\sqrt{6}-\sqrt{3})\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=(9-6\sqrt{2})-2(2\sqrt{3}-\sqrt{6})+2=\mathbf{11-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$

(10)与式$=\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=(3+2\sqrt{2})-3=\mathbf{2\sqrt{2}}$

14 (1)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(2)$\frac{3\sqrt{6}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$　(4)$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　(5)$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$　(6)$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$　(7)$17-12\sqrt{2}$

(8)$5-4\sqrt{2}$

15 (1)与式$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}+3}{3}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(2)与式$=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+2+\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{4\sqrt{5}+8+\sqrt{5}+1}{4}=\mathbf{\frac{5\sqrt{5}+9}{4}}$

P16

16 (1)$2\sqrt{3}$　(2)1　(3)与式$=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot1=\mathbf{10}$

(4)与式$=(x^2+y^2)^2-2\cdot(xy)^2=10^2-2\cdot1^2=\mathbf{98}$

17 (1)$3\sqrt{5}$　(2)与式$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(3\sqrt{5})^2+2=\mathbf{47}$

18 $3<5-\sqrt{2}<4$ より，$a=3$，$b=(5-\sqrt{2})-3=2-\sqrt{2}$ となる．

$a^2+b^2=3^2+(2-\sqrt{2})^2=\mathbf{15-4\sqrt{2}}$

19 (1)$\sqrt{2}+1$　(2)$\sqrt{7}-\sqrt{3}$　(3)$\sqrt{5}+\sqrt{3}$　(4)$\sqrt{7}-\sqrt{2}$　(5)与式$=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=\mathbf{2+\sqrt{3}}$

(6)与式$=\sqrt{12-2\sqrt{20}}=\mathbf{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$　(7)与式$=\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\mathbf{\sqrt{6}-1}$　(8)与式$=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\mathbf{\sqrt{5}+1}$

(9)与式$=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}}$

P17 〔混合問題〕

1 (1)$\frac{14}{33}$　(2)$\frac{59}{111}$　(3)$\frac{78}{185}$　**2** (1)-6　(2)$2x-2$　(3)6

3 (1)11　(2)$8+2\sqrt{10}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$　(3)$19+6\sqrt{10}$　(4)$-2\sqrt{10}$　(5)$\frac{9\sqrt{5}+15}{4}$

(6)与式$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{4\sqrt{6}-6}{2\sqrt{15}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{15}}{5}}$

4 $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$　$3<2+\sqrt{3}<4$ より，$a=3$，$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$ となる．

$a-\sqrt{3}b=3-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}$

5 (1)$\sqrt{7}+\sqrt{3}$　(2)与式$=\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$　(3)与式$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

6 $\sqrt{x+2a}=\sqrt{a^2+1+2a}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$，$\sqrt{x-2a}=\sqrt{a^2+1-2a}=\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$

ゆえに，与式$=\frac{|a+1|-|a-1|}{|a+1|+|a-1|}$

(1)与式$=\frac{-(a+1)+(a-1)}{-(a+1)-(a-1)}=\frac{-2}{-2a}=\mathbf{\frac{1}{a}}$　(2)与式$=\frac{(a+1)+(a-1)}{(a+1)-(a-1)}=\frac{2a}{2}=\mathbf{a}$

(3)与式$=\frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)+(a-1)}=\frac{2}{2a}=\mathbf{\frac{1}{a}}$

7 (1)与式$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(2\sqrt{3})^2-2\cdot(-3)=\mathbf{18}$

(2)与式$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=2\sqrt{3}\{18-(-3)\}+3\cdot1=\mathbf{42\sqrt{3}+3}$

8 (1)$x+\frac{1}{x}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\mathbf{6}$　(2)$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=6^2-2=\mathbf{34}$

(3)$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=6^3-3\cdot6=\mathbf{198}$　(4)$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=34^2-2=\mathbf{1154}$

3　1次不等式

P18

1 (1)$2x+5>3x$　(2)$4(a+b)\geqq a-7b$　(3)$20a+b<1000$　(4)$\frac{30}{a}\geqq y$　(5)$100x+150y+z\leqq2500$

2 (1)$<$　(2)$<$　(3)$>$　(4)$<$　(5)$<$　(6)$>$

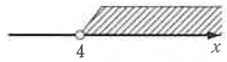
P19

3 (1)$\frac{x}{3}+8$　(2)$10-0.6y$　(3)$\frac{7-y}{2}$

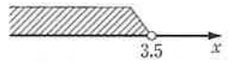
4 (1)$a>b$　(2)$a<b$　(3)$a<b$　(4)$a>b$　(5)$a<b$　(6)$a>b$

5 (1)$x+3-3>7-3$　(2)$x-1.7+1.7<1.8+1.7$　(3)$-9+x+9\geqq-3+9$

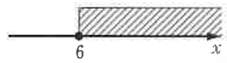
$x>4$



$x<3.5$



$x\geqq6$



6 (1)$x<-1$　(2)$x\leqq13$　(3)$x>\frac{1}{6}$　(4)$x\geqq3$　(5)$x<3$　(6)$x\geqq-4$　(7)$x<9$　(8)$x\leqq-13$

(9)$x>\frac{8}{5}$

7 (1)$x>12$　(2)$x>-10$　(3)$x\leqq28$　(4)$x\leqq-8$　(5)$x\geqq-\frac{10}{9}$　(6)$x<\frac{8}{3}$

P20

8 (1)$x>4$　(2)$x\geqq\frac{12}{7}$　(3)$x\leqq\frac{2}{7}$　(4)$x>-7$　(5)$x\leqq-\frac{5}{6}$　(6)$x<-6$　(7)$x>\frac{9}{4}$　(8)$x\leqq17$

(9)$x<\frac{3}{5}$　(10)$x\leqq3$　(11)$x\leqq9$　(12)$x<-5$　(13)$x>4$　(14)$x\leqq-6$　(15)$x>4$　(16)$x\leqq30$

9 (1)$x<\frac{7}{5}$　(2)$x>-14$　(3)$x<9$　(4)$x\leqq-\frac{56}{9}$　(5)$x\geqq-3$　(6)$x>-\frac{3}{2}$　(7)$x\geqq5$　(8)$x>-\frac{9}{5}$

(9)$x<\frac{7}{11}$　(10)$x>-1$　(11)$x>-1$　(12)$x\leqq-\frac{9}{7}$

P21

10 (1)不等式を解くと，$x<\frac{4+a}{3}$　よって，$\frac{4+a}{3}=3$，$\mathbf{a=5}$

(2)方程式を解くと，$x=\frac{8-2a}{5}$　よって，$\frac{8-2a}{5}>0$　これを解くと，$\mathbf{a<4}$

11 (1)りんごが x 個とすると，みかんは$(15-x)$個であるから，$160x+120(15-x)+150\leqq2400$

これを解いて，$x\leqq11\frac{1}{4}$　よって，りんごは**11個**，みかんは $15-11=$**4(個)**

(2)AがBに x 枚あげるとする．A，Bのカードの枚数はそれぞれ$(46-x)$枚，$(14+x)$枚となるから，

$46-x>2(14+x)$，$x<6$　よって，AはBに**5枚まで**あげられる．

12 (1)10%引きの売価は 800×0.9(円)，17%引きの売価は 800×0.83(円)である．商品を x 個$(x>12)$買うとする．

A店での総額は $800\times0.9x$(円)，B店での総額は $800\times12+800\times0.83(x-12)$(円)であるから，

$800\times0.9x>800\times12+800\times0.83(x-12)$　これを解くと，$x>29\frac{1}{7}$　よって，商品は**30個以上買えばよい**．

(2) 8 %の食塩水を x g 混ぜるとすると，それぞれの食塩水に含まれる食塩の量は右のようになる．5 %，8 %の食塩水に含まれる食塩の量の合計が，6 %の食塩水 $(x+800)$g に含まれる食塩の量以上であればよい．

濃度	5 %	8 %	6 %
食塩水の量(g)	800	x	$x+800$
食塩の量(g)	40	$\frac{8}{100}x$	$\frac{6}{100}(x+800)$

$40+\frac{8}{100}x\geqq\frac{6}{100}(x+800)$，$x\geqq400$　よって，**400g 以上混ぜればよい**．

13 (1)平らな道が x kmあるとすると，平らな道を歩くのにかかる時間は $\frac{x}{5}$ 時間である．上り坂は $(15-x)$km あるから，かかる時間は $\frac{15-x}{3}$ 時間となる．所要時間が 4 時間以内であるから，

$\frac{x}{5}+\frac{15-x}{3}\leqq4$，$x\geqq7.5$　よって，平らな道は**7.5km 以上**である．

(2)30人に満たない団体の人数を x 人とする．通常の料金での合計金額は $700x$ 円である．30人の団体として扱ってもらえば，$700\times0.8\times30$(円) であるから，$700x>700\times0.8\times30$，$x>24$　したがって，**25人以上**ならば団体扱いの方が安い．

P22

14 (1)$2\leqq x<4$　(2)$-2\leqq x<2$　(3)$x\geqq2$　(4)$3\leqq x\leqq6$　(5)$2<x<7$　(6)解なし　(7)$x<-\frac{3}{2}$

(8)$-\frac{14}{3}<x\leqq-\frac{10}{7}$

15 (1)$3x+1<x-3$ を解いて，$x<-2$　$x-3<4x+9$ を解いて，$x>-4$　よって，$\boldsymbol{-4<x<-2}$

(2)不等式の各辺を整理すると，$3x-4<5x-1<2x+1$

$3x-4<5x-1$ を解いて，$x>-\frac{3}{2}$　$5x-1<2x+1$ を解いて，$x<\frac{2}{3}$　よって，$\boldsymbol{-\frac{3}{2}<x<\frac{2}{3}}$

16 (1) 1 冊120円のノートを x 冊とすると，1 冊80円のノートは $(10-x)$冊となるから，

$$\begin{cases}900\leqq120x+80(10-x) & \cdots\cdots①\\ 120x+80(10-x)\leqq1000 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①を解いて，$x\geqq2\frac{1}{2}$，②を解いて，$x\leqq5$　よって，$2\frac{1}{2}\leqq x\leqq5$　x は整数だから，1 冊120円のノートは **3 冊以上 5 冊以下**買えばよい．

(2)時速 6 kmで歩いた道のりを x kmとすると，時速 5 kmで歩いた道のりは $(20-x)$kmとなるから，

$$\begin{cases}3\frac{1}{2}\leqq\frac{x}{6}+\frac{20-x}{5} & \cdots\cdots①\\ \frac{x}{6}+\frac{20-x}{5}\leqq3\frac{2}{3} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①を解いて，$x\leqq15$，②を解いて，$x\geqq10$　よって，$10\leqq x\leqq15$

ゆえに，時速 6 kmで歩いた道のりは，**10km 以上15km 以下**である．

(3)原価を x 円とすると，定価は $1.25x$ 円となる．原価の10%，15%の利益を含めた売価はそれぞれ $1.1x$ 円，$1.15x$ 円であるから，

$$\begin{cases}1.1x\leqq1.25x-300 & \cdots\cdots①\\ 1.25x-300\leqq1.15x & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①を解いて，$x\geqq2000$，②を解いて，$x\leqq3000$　よって，$2000\leqq x\leqq3000$

ゆえに，原価が**2000円以上3000円以下**のときである．

17 上下の不等式をそれぞれ①，②とする．①を解いて，$x\leqq7$ ……③，②を解いて，$x\geqq\frac{a-2}{3}$ ……④

③を満たす整数は，大きい方から順に，7，6，5，4，3，2，……だから，整数解が 5 個となるのは，④を満たす範囲に 2 が含まれず 3 が含まれるときとなる．よって，$2<\frac{a-2}{3}\leqq3$ であればよい．これを解いて，

$\boldsymbol{8<a\leqq11}$

P23

18 (1)$x=\pm2$　(2)$x=-5,\ 3$　(3)$x=-5,\ 11$　(4)$x=-\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}$　(5)$x=-5,\ 6$　(6)$x=\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}$

19 (1)$x\geqq-5$ のとき，$x+5=2x$ より，$x=5$(適)，$x<-5$ のとき，$-(x+5)=2x$ より，$x=-\frac{5}{3}$(不適)

よって，$\boldsymbol{x=5}$

(2)$x\geqq1$ のとき，$x-1=2x+1$ より，$x=-2$(不適)，$x<1$ のとき，$-(x-1)=2x+1$ より，$x=0$(適)

よって，$\boldsymbol{x=0}$

(3)$x\geqq\frac{4}{3}$ のとき，$3x-4=x+8$ より，$x=6$(適)，$x<\frac{4}{3}$ のとき，$-(3x-4)=x+8$ より，$x=-1$(適)

よって，$\boldsymbol{x=-1,\ 6}$

20 (1)$-5\leqq x\leqq5$　(2)$-5<x<1$　(3)$x\leqq-1,\ 3\leqq x$　(4)$-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$　(5)$x<-2,\ 8<x$

(6)$-\frac{2}{5}\leqq x\leqq\frac{6}{5}$

21 (1)$x\geqq-6$ のとき，$x+6>3x$ より，$x<3$　よって，$-6\leqq x<3$ ……①

$x<-6$ のとき，$-(x+6)>3x$ より，$x<-\frac{3}{2}$　よって，$x<-6$ ……②　①，②より，$\boldsymbol{x<3}$

(2)$x\geqq\frac{1}{2}$ のとき，$2x-1\leqq x+2$ より，$x\leqq3$　よって，$\frac{1}{2}\leqq x\leqq3$ ……①

$x<\frac{1}{2}$ のとき，$-(2x-1)\leqq x+2$ より，$x\geqq-\frac{1}{3}$　よって，$-\frac{1}{3}\leqq x<\frac{1}{2}$ ……②

①，②より，$\boldsymbol{-\frac{1}{3}\leqq x\leqq3}$

(3)$x\geqq-1$ のとき，$x+(x+1)>4x-3$ より，$x<2$　よって，$-1\leqq x<2$ ……①

$x<-1$ のとき，$x-(x+1)>4x-3$ より，$x<\frac{1}{2}$　よって，$x<-1$ ……②　①，②より，$\boldsymbol{x<2}$

P24　〔混合問題〕

1 (1)$x<-7$　(2)$x\leqq5$　(3)$x\geqq-2$　(4)$x<-3$　(5)$x\geqq-5$　(6)$x<\frac{13}{29}$

2 (1)$-4<x\leqq-2$　(2)$x>\frac{7}{3}$　(3)$-\frac{9}{2}<x<-\frac{6}{5}$　(4)$-\frac{1}{3}<x<4$

3 (1)$x=-\frac{8}{5},\ 4$　(2)$x=-\frac{2}{3},\ 4$　(3)$x\leqq-\frac{1}{2},\ \frac{7}{6}\leqq x$　(4)$-1<x<-\frac{1}{2}$

4 x 個仕入れるとすると，仕入れ値は $240x$ 円，20個割れたときの売り上げは $400(x-20)$円である．

(売り上げ)−(仕入れ値)≧15000 だから，$400(x-20)-240x\geqq15000$，$x\geqq143\frac{3}{4}$

よって，**144個以上**仕入れればよい．

5 上下の不等式をそれぞれ①，②とする．①を解いて，$x>5-a$ ……③，②を解いて，$x<\frac{3a+2}{4}$ ……④

③，④が共通な範囲をもつのは，$5-a<\frac{3a+2}{4}$　すなわち，$a>\frac{18}{7}$ のときである．

ゆえに，$\boldsymbol{a>\frac{18}{7}}$ **のとき，**$\boldsymbol{5-a<x<\frac{3a+2}{4}}$**，**$\boldsymbol{a\leqq\frac{18}{7}}$ **のとき，解なし**

6 (1)$x<\frac{1}{2}$ のとき，$-(x-2)-(2x-1)=5x$ より，$x=\frac{3}{8}$(適)

$\frac{1}{2}\leqq x<2$ のとき，$-(x-2)+(2x-1)=5x$ より，$x=\frac{1}{4}$(不適)

$x\geqq2$ のとき，$(x-2)+(2x-1)=5x$ より，$x=-\frac{3}{2}$(不適)

よって，$\boldsymbol{x=\frac{3}{8}}$

(2)$x<-3$ のとき，$-2x+1\leqq-(x+3)+3x$ より，$x\geqq1$　よって，解なし……①

$-3\leqq x<0$ のとき，$-2x+1\leqq(x+3)+3x$ より，$x\geqq-\frac{1}{3}$　よって，$-\frac{1}{3}\leqq x<0$ ……②

$x\geqq0$ のとき，$2x+1\leqq(x+3)+3x$ より，$x\geqq-1$　よって，$x\geqq0$ ……③

①，②，③より，$\boldsymbol{x\geqq-\frac{1}{3}}$

7　(1)トラックAを x 台とすると，トラックBは $(8-x)$ 台となる．8台で運び出せる商品の個数が320個以上であればよいから，$50x+35(8-x)\geqq320$，$x\geqq2\frac{2}{3}$ ……①　運賃の合計は100000円未満だから，

$15000x+10000(8-x)<100000$，$x<4$ ……②　①，②をともに満たす自然数は3だから，

トラックAは**3台**，トラックBは，$8-3=$**5(台)** となる．

(2)$15000\times3+10000\times5=$**95000(円)**

4　集合と命題

P25

1　(1)$\in$　(2)$\notin$　(3)$\notin$　(4)$\in$

2　(1)$\in$　(2)$\in$　(3)$\notin$　(4)$\notin$

3　(1)$\{11,\ 22,\ 33,\ 44\}$　(2)$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48\}$　(3)$\{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ \cdots\cdots,\ 298\}$

(4)$\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\cdots\}$　(5)$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$　(6)$\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots\}$

4　(1)$\{x\mid x$ は自然数$\}$　(2)$\{x\mid x$ は正の奇数$\}$　〔別解〕$\{2x-1\mid x$ は自然数$\}$

(3)$\{x\mid x$ は99以下の自然数で3の倍数$\}$　〔別解〕$\{3x\mid x$ は整数，$1\leqq x\leqq33\}$

(4)$\{x\mid x$ は19以下の素数$\}$

P26

5　(1)$A\subset B$　(2)$B\subset A$　(3)$A=B$　(4)$B\subset A$

6　(1)$A\cap B=\{2,\ 5,\ 8\}$　(2)$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$　(3)$A\cap C=\{2,\ 8\}$

(4)$B\cap C=\{2,\ 4,\ 8\}$　(5)$A\cap B\cap C=\{2,\ 8\}$　(6)$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$

7　(1)$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$

(2)$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$

(3)$B\cap C=\{3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27\}$

8　$A\cap B=\{x\mid-3<x\leqq-1\}$，$A\cup B=\{x\mid x<2\}$

P27

9　(1)ϕ，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{7\}$，$\{3,\ 5\}$，$\{3,\ 7\}$，$\{5,\ 7\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$

(2)ϕ，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{15\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{1,\ 5\}$，$\{1,\ 15\}$，$\{3,\ 5\}$，$\{3,\ 15\}$，$\{5,\ 15\}$，$\{1,\ 3,\ 5\}$，$\{1,\ 3,\ 15\}$，$\{1,\ 5,\ 15\}$，$\{3,\ 5,\ 15\}$，$\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

(3)ϕ，$\{11\}$，$\{16\}$，$\{11,\ 16\}$

10　(1)$A=\{15,\ 18\}$　(2)$B=\{15,\ 20\}$　(3)$\overline{A}=\{16,\ 17,\ 19,\ 20\}$　(4)$\overline{B}=\{16,\ 17,\ 18,\ 19\}$

(5)$\overline{A}\cup B=\{15,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20\}$　(6)$\overline{A}\cap B=\{20\}$　(7)$A\cup\overline{B}=\{15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\}$

(8)$A\cap\overline{B}=\{18\}$

11　(1)$\overline{A}=\{x\mid x<1,\ 5<x\}$　(2)$\overline{B}=\{x\mid-2\leqq x\leqq3\}$　(3)$\overline{A}\cap B=\{x\mid x<-2,\ 5<x\}$

(4)$A\cup\overline{B}=\{x\mid-2\leqq x\leqq5\}$

P28

12　(1)$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$　(2)$A\cap B=\{6\}$　(3)$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(4)$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$　(5)$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=$**$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$**

(6)$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=$**$\{1,\ 5,\ 7\}$**

13　(1)$A\cap B=\{12,\ 18\}$　(2)$\overline{A}=\{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$　(3)$\overline{A}\cap B=\{15\}$　(4)$A\cap\overline{B}=\{10,\ 14,\ 16,\ 20\}$

(5)$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=$**$\{10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20\}$**

(6)$A\cup B=\{10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$ より，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=$**$\{11,\ 13,\ 17,\ 19\}$**

14　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$，$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ である．

(1)$B\cap C=\{3\}$ より，$\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{B\cap C}=\{n\mid n\neq3,\ n\in U\}$ だから，$A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=$**$\{1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$**

(2)$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$，$B\cup C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$ より，$\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}=\{1,\ 4,\ 8,\ 10\}$

よって，$\overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C})=$**$\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$**

15　(1)$A\cap B=\{x\mid-3\leqq x<-1\}$　(2)$A\cup B=\{x\mid-5<x\leqq1,\ 3<x<5\}$

(3)$\overline{A}=\{x\mid-5<x<-3,\ 1<x<5\}$　(4)$\overline{A}\cap B=\{x\mid-5<x<-3,\ 3<x<5\}$

(5)$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=$**$\{x\mid-5<x<-3,\ -1\leqq x<5\}$**　(6)$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=$**$\{x\mid1<x\leqq3\}$**

16　(1)50　(2)33　(3)16　(4)50　(5)67　(6)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=$**67**

(7)$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=100-16=$**84**

(8)$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=100-67=$**33**

P29

17　(1)偽　(2)真　(3)偽　(4)真

18　(1)真　(2)偽　反例　$a=\frac{1}{2}$，$b=3$

(3)偽　反例　△ABCは3辺の長さが2，2，3の二等辺三角形

(4)偽　反例　四角形ABCDは等脚台形　(5)真　(6)偽　反例　$a=1$，$b=-2$

P30

19　(1)$P=\{x\mid1<x<2\}$，$Q=\{x\mid x<3\}$ とする．$P\subset Q$ だから，命題は**真**である．

(2)$P=\{x\mid x\geqq-1\}$，$Q=\{x\mid0\leqq x\leqq4\}$ とする．$P\subset Q$ でないから，命題は**偽**である．

(3)$P=\{n\mid n$ は24の正の約数$\}$，$Q=\{n\mid n$ は12の正の約数$\}$ とする．

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$，$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ より，$P\subset Q$ でないから，命題は**偽**である．

(4)$P=\{n\mid n$ は4で割ると1余る自然数$\}$，$Q=\{n\mid n$ は正の奇数$\}$ とすると，$P=\{1,\ 5,\ 9,\ \cdots\cdots\}$，$Q=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots\}$ より，$P\subset Q$ だから，命題は**真**である．

P31

20　(1)$p\Rightarrow q$ は正しく，$p\Leftarrow q$ は正しくない．よって，**十分条件**

(2)$p\Rightarrow q$ は正しくなくて，$p\Leftarrow q$ は正しい．よって，**必要条件**

(3)$p\Rightarrow q$ は正しく，$p\Leftarrow q$ は正しくない．よって，**十分条件**

(4)$p\Rightarrow q$ は正しくなくて，$p\Leftarrow q$ は正しい．よって，**必要条件**

(5)$p\Rightarrow q$ は正しく，$p\Leftarrow q$ も正しい．よって，**必要十分条件**

21　(1)(ア)　(2)(イ)　(3)(ウ)　(4)(イ)　(5)(ア)　(6)(エ)　(7)(ア)　(8)(イ)　(9)(ア)　(10)(ウ)

22　(1)$x\neq2$　(2)$x+y=0$　(3)$x<2$　(4)$x+y\geqq0$　(5)x は有理数である．

(6)n は負の整数である．

P32

23　(1)$x=-2$ または $y=-1$　(2)$x\geqq-3$ または $y\geqq3$　(3)$x\neq-2$ かつ $x\neq1$

(4)$-2\leqq x\leqq-1$　(5)$x<-4$ または $-2<x$

24　(1)ある実数 x について，$(x+1)^2<0$ である．偽

(2)すべての実数 x について，$x<1$ である．偽

(3)ある実数 x，y に対し，$x^2+y^2\leqq0$ である．真

(4)すべての自然数 x に対し，$x^2\neq2x$ である．偽

(5)ある素数の平方は偶数である．真

(6)ある実数 x に対し，$x^2+1\leqq0$ である．偽

P33

25 (1)逆　$a+b$ が無理数ならば，a，b はともに無理数である．偽（反例　$a=0$，$b=\sqrt{2}$）
裏　a または b が有理数ならば，$a+b$ は有理数である．偽
対偶　$a+b$ が有理数ならば，a または b は有理数である．偽（反例　$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）
(2)逆　n が偶数ならば，n^2 は偶数である．真
裏　整数 n の平方が奇数ならば，n は奇数である．真
対偶　n が奇数ならば，n^2 は奇数である．真
(3)逆　$x=2$ かつ $y=3$ ならば，$xy=6$ である．真
裏　$xy\neq 6$ ならば，$x\neq 2$ または $y\neq 3$ である．真
対偶　$x\neq 2$ または $y\neq 3$ ならば，$xy\neq 6$ である．偽（反例　$x=1$，$y=6$）
(4)逆　2つの三角形が合同ならば，その2つの三角形の面積は等しい．真
裏　2つの三角形の面積が等しくなければ，その2つの三角形は合同ではない．真
対偶　2つの三角形が合同でないならば，その2つの三角形の面積は等しくない．偽
（反例　底辺と高さが等しくなればよい．）
(5)逆　a，b，c のうち少なくとも1つが負ならば，$abc<0$ である．偽（反例　$a=b=-1$，$c=1$）
裏　$abc\geqq 0$ ならば，a，b，c はすべて0以上である．偽
対偶　a，b，c がすべて0以上ならば，$abc\geqq 0$ である．真

26 対偶は，「m，n の少なくとも一方が偶数ならば，mn は偶数である．」となる．これを証明する．
$m=2k$（k は整数）とすると，$mn=2kn$ となり，mn は偶数である．$n=2k$ のときも同様に証明できる．
また，$m=2k$，$n=2l$（l は整数）のときも，$mn=4kl$ となるから，mn は偶数である．
よって，対偶が真であることが示されたから，もとの命題も証明された．

27 (1)対偶は，$x\neq 0$ または $y\neq 0$ ならば，$x^2+y^2\neq 0$ である．
$x\neq 0$ かつ $y=0$ とすると，$x^2>0$，$y^2=0$ だから，$x^2+y^2\neq 0$
$x=0$ かつ $y\neq 0$，$x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ のときも同様．よって，対偶が真なので証明された．
(2)対偶は，$x=2$ かつ $y=4$ ならば，$xy=8$ である．
これは真なので，もとの命題も真である．
(3)対偶は，$a=b$ ならば，$a^2\leqq bc$ または $ac\leqq b^2$ である．$a^2\leqq ac$，$ac\leqq a^2$ のいずれか一方は必ず成り立つから，
$a=b$ のとき $a^2\leqq bc$ または $ac\leqq b^2$ が成り立つ．よって，もとの命題も真である．

P34

28 x が無理数で，$5x$ が a という有理数で表されると仮定すると，$5x=a$ より，$x=\dfrac{a}{5}$　すなわち，x は有理数となる．これは，x が無理数であることに矛盾する．よって，$5x$ は無理数である．

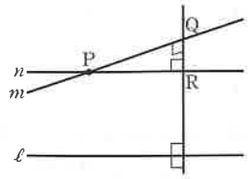
29 a，b，c がすべて0以上であるとする．0を含むときは，$abc\neq 0$ に矛盾する．
すべて正の数の場合は，$a+b+c>0$ となり，$a+b+c=0$ に矛盾する．
よって，a，b，c のうち少なくとも1つは負の数である．

30 両方が奇数のとき，$p=2m+1$，$q=2n+1$（m，n は整数）とおけて，
$p^2+q^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=2(2m^2+2n^2+2m+2n+1)$
両方が偶数のとき，$p=2m$，$q=2n$ とおけて，$p^2+q^2=(2m)^2+(2n)^2=2(2m^2+2n^2)$
よって，いずれの場合も偶数となり，矛盾する．ゆえに，p，q の一方は奇数で，他方は偶数である．

31 (1)$a+b\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$ より，$(b-y)\sqrt{2}=x-a$ ……①
いま，$b\neq y$ とすると，$\sqrt{2}=\dfrac{x-a}{b-y}$
ここで，$x-a$，$b-y$ は有理数であるから $\sqrt{2}$ は有理数となる．これは，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．
よって，$b=y$ である．
したがって，①より，$a=x$　ゆえに，$a=x$，$b=y$
(2)$4x+y=7$，$3x+2y=4$ を連立方程式として解いて，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=-1}$

32 点Pを通り，直線 ℓ に平行な直線が m と n の2本あると仮定する．
直線 ℓ に垂直な直線と m，n との交点をそれぞれQ，Rとする．
$\ell /\!/ m$ より，同位角は等しいから，$\angle PQR=90^\circ$

同様に，$\ell /\!/ n$ より，$\angle PRQ=90^\circ$
よって，△PQRにおいて，
$\angle PQR+\angle PRQ+\angle RPQ=180^\circ+\angle RPQ>180^\circ$
これは，三角形の内角の和が180°であることに矛盾する．
よって，直線 ℓ 上にない点Pを通り，直線 ℓ に平行な直線は1本だけである．



33 ∠Cが鋭角でないと仮定すると，∠Cは直角，鈍角のいずれかである．
∠Cが直角ならば，三平方の定理より，$AB^2=AC^2+BC^2>AC^2$
よって，AB>AC となり，AB<AC に矛盾する．
∠Cが鈍角ならば，辺AB上に $\angle ACD=90^\circ$ となる点Dをとることができる．
△ACDにおいて，三平方の定理より，$AD^2=AC^2+CD^2>AC^2$　ゆえに，AD>AC
AB>AD だから，AB>AC となり，AB<AC に矛盾する．
したがって，△ABCにおいて，AB<AC ならば，∠Cは鋭角である．

P35　〔混合問題〕

1 $A\cap B\cap C=\{x\mid -1<x\leqq 2\}$，$A\cup B\cup C=\{x\mid -7\leqq x<5\}$

2 (1)$B\cap C=\{4,\ 16\}$　(2)$A\cup B=\{1,\ 4,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16\}$　(3)$A\cap\overline{C}=\{12\}$
(4)$A\cup C=\{2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\}$ より，$\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A\cup C}=\boldsymbol{\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15\}}$
(5)$B\cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 16\}$ より，$A\cap(B\cup C)=\boldsymbol{\{4,\ 8,\ 16\}}$
(6)$B\cap C=\{4,\ 16\}$ より，$\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{B\cap C}=\{n\mid n\in U,\ n\neq 4,\ n\neq 16\}$ となる．
よって，$A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=\boldsymbol{\{8,\ 12\}}$

3 (1)必要　(2)十分　(3)必要十分　(4)必要

4 (1)m，n のうち少なくとも一方は奇数　(2)m，n はともに奇数

5 (1)2つの角が等しくなければ，二等辺三角形でない．真
(2)$a\leqq 1$ または $b\leqq 2$ ならば，$2a+b\leqq 4$ である．偽（反例　$a=0$，$b=6$）
(3)$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ ならば，$x+y\geqq 0$ である．真

6 $a+b$ と $a-b$ がともに有理数であるとすると，これらは有理数 p，q を用いて，
$a+b=p$ ……①，$a-b=q$ ……② と表せる．①，②を a，b についての連立方程式として解くと，
$a=\dfrac{p+q}{2}$，$b=\dfrac{p-q}{2}$ で，$\dfrac{p+q}{2}$，$\dfrac{p-q}{2}$ は有理数であるから，a，b は有理数となり，仮定に反する．
ゆえに，a，b が無理数ならば，$a+b$ と $a-b$ の少なくとも一方は無理数である．

7 (1)$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,\ b\}$，$\{b,\ c\}$，$\{c,\ a\}$
(2)まず，要素が1個の集合が2つ以上になることはない．なぜなら，これらの共通部分は ϕ となるからである．また，要素が2個の集合が3つになることはない．なぜなら，共通部分として $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$ の3つが生じるからである．ゆえに，求める集合は，要素が1個の集合が1つ，要素が2個の集合が2つ，要素が3個の集合が1つという形になる．このようなもののうち，条件に適するのは，
$\boldsymbol{\{\{a\},\ \{a,\ b\},\ \{c,\ a\},\ \{a,\ b,\ c\}\}}$，$\boldsymbol{\{\{b\},\ \{a,\ b\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\}}$，
$\boldsymbol{\{\{c\},\ \{b,\ c\},\ \{c,\ a\},\ \{a,\ b,\ c\}\}}$

8 $A\cap B\neq\phi$ とし，$c\in A\cap B$ とする．このとき，$c\in A$，$c\in B$ でもあるから，仮定より，$c+c\in C$
すなわち，$2c\in C$ となる．よって，偶数 $2c$ が C の要素となり，C の要素がすべて奇数であることに矛盾する．
ゆえに，$A\cap B=\phi$ である．

章末問題

P36　〔章末問題A〕

1 (1)$12x^2-xy-20y^2$　(2)$x^2-4y^2-9z^2+12yz$　(3)$x^4-10000$　(4)$x^4-10x^3+35x^2-50x+24$
(5)$(x-3)(x-2)(2x+1)(2x+3)$　(6)$(a-b)(a-b+2c)$　(7)$(x-2y-3)(2x-3y+1)$
(8)$(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

2 $a<-\dfrac{1}{2}$ のとき，$-3a+2$，$-\dfrac{1}{2}\leqq a<3$ のとき，$a+4$，$a\geqq 3$ のとき，$3a-2$

3 (1)$\sqrt{6}$　(2)1　(3)与式$=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{6})^2-2\cdot1=\mathbf{4}$
(4)与式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)=\sqrt{6}(4-1)=\mathbf{3\sqrt{6}}$

4 (1)$-2\leqq x<4$　(2)$-12\leqq x\leqq -2$　**5** (1)$x=-\frac{1}{3}$, 3　(2)$x\leqq\frac{8}{5}$, $10\leqq x$

6 (1)Aの要素は，2でも3でも割り切れない数であるから，偶数は含まず，奇数のうち3の倍数も含まない．ゆえに，$\boldsymbol{A\subset B}$
(2)$\overline{A}$の要素は，2か3で割り切れる数，$\overline{B}$の要素は偶数である．よって，$\overline{A}$は偶数をすべて含み，奇数のうち3の倍数も含む．ゆえに，$\boldsymbol{\overline{A}\supset\overline{B}}$

7 (1)$A\cap B$の要素はBの要素でもある．よって，$2a=2$……①，または$a+3=2$……②
①のとき，すなわち$a=1$のとき，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{1,\ 2,\ 4\}$，$A\cap B=\{1,\ 2\}$で，題意に適する．
②のとき，すなわち$a=-1$のとき，$A=\{-1,\ 0,\ 1\}$，$B=\{-2,\ -1,\ 2\}$，$A\cap B=\{-1,\ 2\}$で，題意に適さない．
以上より，$\boldsymbol{a=1}$
(2)$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

8 (1)十分　(2)必要　(3)必要十分

9 逆：x，yの少なくとも一方が無理数ならば，xyは無理数である．(偽)（反例　$x=\sqrt{2}$，$y=0$）
裏：xyが有理数ならば，x，yはともに有理数である．(偽)
対偶：x，yがともに有理数ならば，xyは有理数である．(真)
対偶が真であるから，もとの命題も**真**

10 a，bのうちの一方が偶数，一方が奇数であるとし，それらを$2m$，$2n-1$(m，nは自然数)とおくと，$(2m)^2+(2n-1)^2=4(m^2+n^2-n)+1$となり，4の倍数とならない．また，$a$，$b$の両方が奇数であるとし，それらを$2m-1$，$2n-1$($m$，$n$は自然数)とおくと，$(2m-1)^2+(2n-1)^2=4(m^2+n^2-m-n)+2$となり，4の倍数とならない．いずれの場合も仮定と矛盾するから，a，bはともに偶数である．

P37　〔章末問題B〕

1 (1)与式$=\{(a+b+c-d)^2-(a-b+c+d)^2\}+\{(a+b-c+d)^2-(-a+b+c+d)^2\}$
$=\{(a+b+c-d)+(a-b+c+d)\}\{(a+b+c-d)-(a-b+c+d)\}$
$+\{(a+b-c+d)+(-a+b+c+d)\}\{(a+b-c+d)-(-a+b+c+d)\}$
$=(2a+2c)(2b-2d)+(2b+2d)(2a-2c)=4(ab-ad+bc-cd)+4(ab-bc+ad-cd)$
$=\boldsymbol{8ab-8cd}$
(2)与式$=(xy+1)\{xy+(x+y)+1\}+xy=(xy+1)\{(xy+1)+(x+y)\}+xy$
$=(xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$　（ここで，$X=xy+1$とおく）
$=X^2+(x+y)X+xy=(X+x)(X+y)=\boldsymbol{(xy+1+x)(xy+1+y)}$
(3)与式$=a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

2 $|a|<1$より$-1<a<1$であるから，$-2<2a<2$，$-2<-2a<2$
同様に，$-2<2b<2$，$-2<-2b<2$
$a+b\geqq0$，$a-b\geqq0$のとき，$|a+b|+|a-b|=(a+b)+(a-b)=2a<2$となり，成り立つ．
$a+b\geqq0$，$a-b<0$のとき，$|a+b|+|a-b|=(a+b)-(a-b)=2b<2$となり，成り立つ．
$a+b<0$，$a-b\geqq0$のとき，$|a+b|+|a-b|=-(a+b)+(a-b)=-2b<2$となり，成り立つ．
$a+b<0$，$a-b<0$のとき，$|a+b|+|a-b|=-(a+b)-(a-b)=-2a<2$となり，成り立つ．
以上より，$|a+b|+|a-b|<2$が成り立つ．

3 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3$，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\sqrt{5}$より，
$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\boldsymbol{5\sqrt{5}}$

4 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$の両辺に$xyz$をかけて，$yz+zx+xy=\frac{1}{3}xyz$
(1)与式$=(x-3)(yz-3y-3z+9)=xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=xyz-3\cdot\frac{1}{3}xyz+9\cdot3-27=\mathbf{0}$

(2)与式$=x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz$
$=3\left(3^2-3\cdot\frac{1}{3}xyz\right)+3xyz=\mathbf{27}$

5 (1)●$x\geqq4$のとき，$2|4x-4|>7x+4$，$2(4x-4)>7x+4$，$x>12$……①
●$x<4$のとき，$2|2x+4|>7x+4$
㋐$-2\leqq x<4$のとき，$2(2x+4)>7x+4$，$x<\frac{4}{3}$　よって，$-2\leqq x<\frac{4}{3}$……②
㋑$x<-2$のとき，$-2(2x+4)>7x+4$，$x<-\frac{12}{11}$　よって，$x<-2$……③
①，②，③を合わせて，$\boldsymbol{x<\frac{4}{3}}$，$\boldsymbol{12<x}$
(2)与式$=\sqrt{1+(x+2)-2\sqrt{1\cdot(x+2)}}$
$1>x+2$のとき，与式$=1-\sqrt{x+2}$　　$x+2\geqq1$のとき，与式$=\sqrt{x+2}-1$
よって，**$-2\leqq x<-1$のとき，$1-\sqrt{x+2}$，$x\geqq-1$のとき，$\sqrt{x+2}-1$**

6 条件より，次の不等式が成り立つ．$(1+2x)-\frac{5}{100}\leqq\frac{7}{5}(x+1)<(1+2x)+\frac{5}{100}$……①
また，$1+2x$は小数第1位までの数だから，xは整数，小数第1位までの数，小数第2位までの数で小数第2位の数が5である数のいずれかである．
①を解くと，$\frac{7}{12}<x\leqq\frac{3}{4}$　上で述べたことに注意すると，あてはまるのは，**$x=0.6$，0.65，0.7，0.75**

7 (1)$0<a\leqq1$
(2)$A\cap B$に含まれる整数は2，3となるから，$\boldsymbol{3\leqq a<4}$
(3)$\overline{A}\subset\overline{B}$のとき，$B\subset A$だから，$\boldsymbol{a\geqq5}$

8 ㈠の性質を使って，$d+d\in G$より，$2d\in G$，$d+2d\in G$より，$3d\in G$，……とくり返していき，任意の自然数kに対し，$kd\in G$であることがわかる．
次に，Gの中にkdの形で表せない要素xが存在すると仮定すると，ある自然数mが存在して，$md<x<(m+1)d$である．ここで，㈡より，$x-md\in G$である．
ところが，$x-md<(m+1)d-md=d$となるから，Gはdより小さい要素をもつことになり，矛盾する．
ゆえに，Gは，$G=\{kd\mid k$は自然数$\}$の形になる．