第1章 場合の数と確率

1 集合と要素の個数

例題 1 集合と要素

正の奇数全体の集合をAとする．次の□の中に，$\in$または$\notin$のいずれかを書き入れよ．

(1) $5\square A$　　(2) $2\square A$

解 (1) $5\in A$　(2) $2\notin A$

次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) 6の正の約数全体の集合　　(2) $\{x \mid x$は40以下の自然数で7の倍数$\}$

解 (1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$　(2) $\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35\}$

1 正の偶数全体の集合をAとする．次の□の中に，$\in$または$\notin$のいずれかを書き入れよ．

(1) $8\square A$　(2) $3\square A$　(3) $11\square A$　(4) $16\square A$

2 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) 60以下の自然数で13の倍数全体の集合　　(2) 72の正の約数全体の集合

(3) $\{x \mid x$は自然数で3の倍数$\}$　　(4) $\{5n-4 \mid n$は自然数$\}$

例題 2 部分集合

集合$\{a,\ b,\ c\}$の部分集合をすべて書け．

解 空集合，要素が1個のもの，2個のもの，3個のものの順に書くと，

ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ c\}$

3 次の集合の部分集合をすべて書け．

(1) $\{0,\ 1\}$　(2) $\{a,\ b,\ c,\ d\}$　(3) $\{n \mid n$は正の偶数で$n^2 \leqq 50\}$

4 集合$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$と集合$B=\{2n-1 \mid n$は整数，$1 \leqq n \leqq 6\}$の間の関係を，$\subset$または$=$を用いて表せ．

●ポイント

① 要素aが集合Aに属することを$a\in A$，要素bが集合Aに属さないことを$b\notin A$と表す．

② 集合の表し方には，$\{○,\ ○,\ \cdots\cdots,\ ○\}$のように要素を書き並べる方法と，$\{x \mid \boxed{x\text{の満たす条件}}\}$のように要素の条件を述べる方法がある．

③ 集合Aのすべての要素が集合Bの要素になっているとき，AはBの**部分集合**であるといい，$A\subset B$または$B\supset A$と表す．集合A，Bの要素が完全に一致するとき($A\subset B$かつ$B\subset A$のとき)は，AとBは**等しい**といい，$A=B$と表す．

④ 要素を1つももたない集合を**空集合**といい，記号ϕで表す．空集合ϕはすべての集合の部分集合であると考える．

例題 3 共通部分・和集合・補集合

2つの集合$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$について，$A\cap B$と$A\cup B$を求めよ．

解 $A\cap B$は，AとBのどちらにも含まれる要素全体の集合だから，$A\cap B=\{6,\ 12\}$

$A\cup B$は，AとBの要素をすべて集めた集合だから，$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

$U=\{n \mid n$は1桁の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 補集合$\overline{A}$を求めよ．　　(2) 集合$\overline{A}\cap B$を求めよ．

解 (1) $\overline{A}=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$　(2) $\overline{A}\cap B=\{2,\ 4,\ 8,\ 9\}$

5 集合$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$，$C=\{n \mid n$は3で割り切れる自然数$\}$について，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $A\cap B$　(2) $A\cup B$　(3) $A\cap C$　(4) $B\cap C$

6 $U=\{n \mid n$は10以下の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{n \mid n$は8の正の約数$\}$，$B=\{n \mid n$は奇数，$n\in U\}$とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{B}$　(3) $\overline{A}\cap B$　(4) $A\cup\overline{B}$

例題 4 ド・モルガンの法則

$U=\{x \mid x$は10以下の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{3,\ 4,\ 7,\ 8\}$，$B=\{4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cup B$　(2) $A\cap B$　(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$

解 (1) $A\cup B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$　(2) $A\cap B=\{4,\ 8\}$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$　(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1,\ 2\}$

7 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$を全体集合とし，$A=\{a,\ d,\ f,\ h\}$，$B=\{c,\ d,\ g,\ h\}$とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cup B$　(2) $A\cap B$　(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{B}$　(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(6) $\overline{A}\cap\overline{B}$

8 $U=\{x \mid x$は10以上20以下の整数$\}$を全体集合とし，$A=\{x \mid x$は奇数，$x\in U\}$，$B=\{x \mid x$は5の倍数，$x\in U\}$とするとき，次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) $A\cup B$　(2) $A\cap B$　(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(5) $\overline{A}\cap B$　(6) $A\cap\overline{B}$

●ポイント

① $A\cap B$はAとBの**共通部分**，$A\cup B$はAとBの**和集合**を表す．

② 全体集合をU，その部分集合をAとするとき，Uの要素であってAの要素でないもの全体の集合をAの**補集合**といい，$\overline{A}$で表す．また，$\overline{\overline{A}}=A$である．

③ 〔ド・モルガンの法則〕 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例題 5　集合の要素の個数①

全体集合Uを50以下の自然数の集合とし，$A=\{x|x$は3の倍数，$x\in U\}$，$B=\{x|x$は5の倍数，$x\in U\}$とするとき，次の値を求めよ．

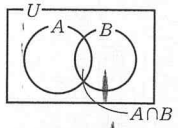
(1) $n(A)$　(2) $n(B)$　(3) $n(A\cap B)$　(4) $n(\overline{A})$　(5) $n(A\cup B)$

解 (1) $50\div3=16$余り2より，$n(A)=\mathbf{16}$　(2) $50\div5=10$より，$n(B)=\mathbf{10}$

(3) $A\cap B$は，3の倍数かつ5の倍数の集合だから，15の倍数の集合である．$50\div15=3$余り5より，$n(A\cap B)=\mathbf{3}$

(4) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=50-16=\mathbf{34}$

(5) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+10-3=\mathbf{23}$



9　$U=\{x|x$は100以下の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{x|x$は3の倍数，$x\in U\}$，$B=\{x|x$は5の倍数，$x\in U\}$とするとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A)$　(2) $n(B)$　(3) $n(A\cap B)$
(4) $n(\overline{A})$　(5) $n(\overline{B})$　(6) $n(A\cup B)$

10　$U=\{x|x$は2桁の自然数$\}$を全体集合とし，$A=\{x|x$は4の倍数，$x\in U\}$，$B=\{x|x$は7の倍数，$x\in U\}$とするとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$　(2) $n(A\cup B)$　(3) $n(\overline{A})$
(4) $n(\overline{B})$　(5) $n(\overline{A}\cup\overline{B})$　(6) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

11　1から200までの自然数のうち，次のような数は何個あるか．

(1) 2で割り切れる　(2) 3で割り切れる
(3) 2でも3でも割り切れる　(4) 2と3の少なくとも一方で割り切れる
(5) 2でも3でも割り切れない　(6) 2と3の少なくとも一方で割り切れない

例題 6　集合の要素の個数②

男女合わせて54人の生徒がおり，男子生徒は30人，眼鏡をかけている生徒は15人，男子で眼鏡をかけている生徒は11人である．次の生徒の人数を求めよ．

(1) 女子生徒　(2) 眼鏡をかけていない生徒
(3) 女子で眼鏡をかけていない生徒

解 生徒全員の集合を全体集合U，男子の集合をA，眼鏡をかけている生徒の集合をBとする．女子生徒の集合は$\overline{A}$，眼鏡をかけていない生徒の集合は$\overline{B}$となる．

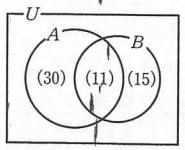
(1) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=54-30=24$より，**24人**．

(2) $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=54-15=39$より，**39人**．

(3) 女子で眼鏡をかけている生徒の人数は，

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=15-11=4$（人）

したがって，女子で眼鏡をかけていない生徒の人数は，$24-4=20$より，**20人**．



●ポイント

① Aが有限集合のとき，Aに属する要素の個数を記号$n(A)$で表す．

② $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

12　男女合わせて300人いる学校で，あるテストをしたところ，70点以上の女子生徒は104人，全体では70点以上の生徒は190人いた．女子生徒の人数は170人である．次の生徒の人数を求めよ．

(1) 男子生徒　(2) 70点未満の生徒　(3) 男子で70点未満の生徒

13　1から1000までの自然数のうち，次のような数は何個あるか．

(1) 6で割り切れる　(2) 7で割り切れる
(3) 6でも7でも割り切れる　(4) 6で割り切れるが7で割り切れない
(5) 7で割り切れるが6で割り切れない

例題 7　集合の要素の個数③

ある地区の総世帯数は191である．そのうち，新聞をとっている世帯が170ある．x新聞をとっている世帯は89，y新聞をとっている世帯は108あり，その他の新聞はこの地区にはない．

(1) 新聞をとっていない世帯はいくつあるか．

(2) x，y両方の新聞をとっている世帯はいくつあるか．

解 地区の総世帯の集合を全体集合U，x新聞をとっている世帯の集合をA，y新聞をとっている世帯の集合をBとする．

(1) $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=191-170=21$　よって，**21世帯**．

(2) x，y両方の新聞をとっている世帯数は$n(A\cap B)$と表される．

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$より，$170=89+108-n(A\cap B)$，$n(A\cap B)=27$

よって，x，y両方の新聞をとっている世帯は**27世帯**．

14　Z地区の総世帯数は332である．そのうち，新聞をとっている世帯が314ある．x新聞をとっている世帯は163，y新聞をとっている世帯は193あり，その他の新聞はこの地区にはない．

(1) 新聞をとっていない世帯はいくつあるか．

(2) x，y両方の新聞をとっている世帯はいくつあるか．

15　Y地区の500世帯のうち，液晶テレビを所有する世帯が261，自動車を所有する世帯が290ある．液晶テレビまたは自動車を所有する世帯が400のとき，次の問いに答えよ．

(1) 液晶テレビも自動車も所有しない世帯はいくつあるか．

(2) 液晶テレビと自動車の両方とも所有する世帯はいくつあるか．

(3) 液晶テレビを所有し自動車を所有しない世帯はいくつあるか．

●ポイント

① $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

② **15** (1) 液晶テレビを所有する世帯の集合をA，自動車を所有する世帯の集合をBとすると，求めるものは$n(\overline{A}\cap\overline{B})$である．ド・モルガンの法則を利用して考える．

例題 8　3つの集合の要素の個数

132人の高校生にA，B，C 3種のテストを行った．Aテストに52人，Bテストに56人，Cテストに47人が合格したが，これらの中で，A，B両テストに15人，B，C両テストに14人，C，A両テストに13人が合格している．3種のテストのどれにも合格しなかった人は11人であった．

このとき，3種のテストすべてに合格した人は何人か．

解　テストを受けた高校生全員の集合を全体集合U，A，B，Cのテストに合格した人の集合をそれぞれA，B，C，3種のテストのどれにも合格しなかった人の集合をDとする．

このとき，求める人数は$n(A\cap B\cap C)$と表される．

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

において，$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(D)=132-11=121$より，

$121=52+56+47-15-14-13+n(A\cap B\cap C)$，$n(A\cap B\cap C)=8$

よって，3種のテストすべてに合格した人は8人．

16　214人の高校生にA，B，C 3種のテストを行った．Aテストに81人，Bテストに97人，Cテストに77人が合格したが，これらの中で，A，B両テストに21人，B，C両テストに25人，C，A両テストに22人が合格している．3種のテストのどれにも合格しなかった人は14人であった．このとき，3種のテストすべてに合格した人は何人か．

17　120人の大学生について調査したところ，パソコンを持っている人が84人，スマートフォンを持っている人が60人，自動車を持っている人が45人であった．これらの中で，パソコンもスマートフォンも持っている人は46人，スマートフォンも自動車も持っている人は28人，自動車もパソコンも持っている人は36人で，パソコン，スマートフォン，自動車のすべてを持っている人は20人であった．

このとき，パソコン，スマートフォン，自動車のどれも持っていない人は何人か．

18　1から1000までの整数のうち，次のような数は何個あるか．

(1)　2でも3でも割り切れる　　(2)　3でも5でも割り切れる

(3)　5でも2でも割り切れる　　(4)　2でも3でも5でも割り切れる

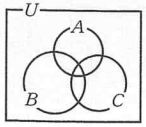
(5)　2，3，5のうち少なくとも1つで割り切れる

(6)　2，3のうち少なくとも1つで割り切れて，5で割り切れる．

●ポイント

① $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$

② **18** (6)「10，15のうち少なくとも1つで割り切れる数」と同じ意味になる．



混合問題

A

1　全体集合Uを1桁の自然数全体の集合とし，$A=\{4,\ 5,\ 8,\ 9\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　Aの部分集合のうち，要素の個数が2個であるものをすべて求めよ．

(2)　次の集合を要素を書き並べる方法で表せ．

①　$\overline{A}\cup B$　　②　$\overline{A}\cap\overline{B}$

2　ある学年で通学方法の調査をしたところ，学年全体の人数500人のうち，バスを利用している人が238人，電車を利用している人が210人，バスと電車の両方を利用している人が76人であった．この学年全体で，バスも電車も利用していない人は何人か．

3　4500世帯が住んでいるP地区で，4人以上の家族がいる世帯は2750世帯ある．また，4人以上の家族がいる世帯で自動車を所有している世帯は2125世帯ある．P地区で自動車を所有している世帯は3625世帯ある．

(1)　P地区で3人以下の家族の世帯は何世帯か．

(2)　P地区で自動車を所有していない世帯は何世帯か．

(3)　3人以下の家族の世帯で自動車を所有しない世帯は何世帯か．

4　3桁の自然数のうちで，6では割り切れるが9では割り切れない数の個数を求めよ．

B

5　$P=\{n\mid n$は36以下の自然数$\}$とし，$A=\{2n\mid n\in P\}$，$B=\left\{\dfrac{72}{n}\,\middle|\,n\in P\right\}$とするとき，$A\cap B$を，要素を書き並べる方法で表せ．

6　300人の生徒を対象に好きなスポーツのアンケート調査を行った．結果はサッカー172人，テニス128人，野球145人，サッカーとテニス67人，テニスと野球60人，サッカーと野球55人，3つとも好きでない人は12人であった．サッカーとテニスは好きだが野球は好きではない人の人数を求めよ．

7　100以下の自然数のうち，2でも3でも5でも割り切れない数は何個あるか．

■ヒント

6　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$を利用する．

7　全体集合をU，Uの部分集合で2，3，5で割り切れる数の集合をそれぞれA，B，Cとおき，$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$を求めればよい．

2 場合の数・順列

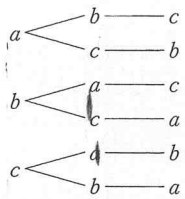
例題 1　樹形図

3個の文字a，b，cを1列に並べるとき，その並べ方をすべて求めよ．

解　樹形図をかいて求めると，右のようになる．

よって，文字の並べ方は，次の6通りである．

abc*，*acb*，*bac*，*bca*，*cab*，*cba



1　3個の数字1，2，3を全部並べて3桁の整数をつくるとき，その並べ方をすべて求めよ．

2　4個の数字1，1，2，3から，3個を選んで3桁の整数をつくるとき，その並べ方は何通りあるか．

3　大中小の3個のさいころを同時に投げるとき，目の和が5になる場合は何通りあるか．

例題 2　和の法則

1から8までの数を1つずつ書いた8枚のカードがある．これらから，同時に2枚のカードを引くとき，次の問いに答えよ．

(1)　カードの数の和が6または7になる場合の数を求めよ．

(2)　カードの数の積が6以下になる場合の数を求めよ．

解　2枚のカードの数は異なるから，小さい方の数を先に書いて整理する．

(1)　和が6…　1と5，2と4

和が7…　1と6，2と5，3と4

よって，2+3=**5(通り)**

(2)　積が1…なし　　積が2…1と2　　積が3…1と3　　積が4…1と4

積が5…1と5　　積が6…1と6，2と3

よって，1+1+1+1+2=**6(通り)**

●ポイント

①　あるものを，もれなく，重複もしないように数えあげるには，樹形図をかくと便利である．

②　あることがらについて，起こりうるすべての場合を数えあげるとき，その総数を**場合の数**という．

③　**〔和の法則〕**　2つのことがらA，Bがあって，これらは同時には起こらないとする．Aの起こり方がm通り，Bの起こり方がn通りならば，AまたはBの起こる場合の数は**$m+n$通り**である．

4　1から8までの数を1つずつ書いた8枚のカードがある．これらから，同時に2枚のカードを引くとき，次の問いに答えよ．

(1)　カードの数の和が10か11になる場合の数を求めよ．

(2)　カードの数の和が6以上9以下になる場合の数を求めよ．

5　大小2個のさいころを同時に投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　出た目の和が5または7になる場合の数を求めよ．

(2)　出た目の和が3の倍数になる場合の数を求めよ．

(3)　出た目の積が8以下になる場合の数を求めよ．

6　3つの同じさいころを同時に投げるとき，次の問いに答えよ．

(1)　出た目の数の和が6以下になる場合の数を求めよ．

(2)　出た目の数の積が6以下になる場合の数を求めよ．

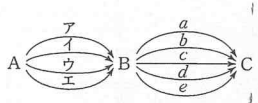
例題 3　積の法則①

A地点からB地点へ行く道が4本，B地点からC地点へ行く道が5本ある．A地点からB地点を通ってC地点へ行く方法は何通りあるか．

解　A地点からB地点へ行く方法4通りのおのおのに対して，

B地点からC地点へ行く方法が5通りずつあるから，

4·5=20　　よって，**20通り**．



7　A地点からB地点へ行く道が3本，B地点からC地点へ行く道が6本ある．A地点からB地点を通ってC地点へ行く方法は何通りあるか．

8　男子30人，女子28人の中から男女1人ずつ計2人の代表を選ぶ方法は何通りあるか．

9　あるレストランで，5種類のメインディッシュ，4種類のデザート，6種類のドリンクからそれぞれ1種類ずつ選ぶ方法は何通りあるか．

10　次の式を展開すると，項は何個できるか．

(1)　$(a+b+c+d)(x+y+z)$　　(2)　$(1+x)(1+y+y^2)(1+z+z^2+z^3)$

●ポイント

①　**〔積の法則〕**　2つのことがらA，Bがあって，Aの起こり方がm通りあり，そのおのおのに対して，Bの起こり方がn通りあるとき，AとBがともに起こる場合の数は**mn通り**である．

②　積の法則は，AかつBが起こるという2つの場合だけでなく，AとBとCが同時に起こるという3つ以上の場合にも成り立つ．

例題 4　積の法則②　（約数の個数・和）

400の正の約数について，次のものを求めよ．

(1)　正の約数の個数　　(2)　正の約数の総和

解　(1)　素因数分解すると $400=2^4\cdot5^2$ だから，400の約数は 2^4 と 5^2 の約数の積で表される．

2^4 の約数は，1，2，2^2，2^3，2^4 の5通り，5^2 の約数は，1，5，5^2 の3通り．

400の正の約数は，2^4 の約数の選び方5通りのおのおのに対して，5^2 の約数の選び方が3通りある．

よって，積の法則より，$5\cdot3=$**15(個)**

(2)　400の正の約数は右の15個であり，これらの約数は，次の式を展開するとすべて現れる．

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5+5^2)$

よって，求める正の約数の総和は，

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5+5^2)=31\cdot31=$**961**

	1	2	2^2	2^3	2^4
1	1	2	2^2	2^3	2^4
5	5	$2\cdot5$	$2^2\cdot5$	$2^3\cdot5$	$2^4\cdot5$
5^2	5^2	$2\cdot5^2$	$2^2\cdot5^2$	$2^3\cdot5^2$	$2^4\cdot5^2$

11　648の正の約数について，次のものを求めよ．

(1)　正の約数の個数　　(2)　正の約数の総和

12　540の正の約数について，次のものを求めよ．

(1)　正の約数の個数　　(2)　正の約数の総和

13　108^m の正の約数の個数が70個となるような自然数 m の値を求めよ．

14　300の正の約数について，次のものを求めよ．

(1)　正の約数の2乗の総和　　(2)　正の約数の逆数の総和

例題 5　補集合の利用

大小2個のさいころを同時に投げるとき，その目の積が偶数になる場合の数を求めよ．

解　起こりうるすべての場合を U，目の積が偶数になる場合を A とすると，目の積が奇数になる場合は，A の補集合，すなわち $\overline{A}$ となる．

$n(U)=6^2=36$，目の積が奇数になるのは，両方の目が奇数になるときで，$n(\overline{A})=3^2=9$

よって，目の積が偶数になる場合の数は，$n(A)=n(U)-n(\overline{A})=36-9=$**27(通り)**

●ポイント

①　ある自然数が $a^pb^qc^r\cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，

正の約数の個数は，$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$**(個)**

正の約数の総和は，$(1+a+\cdots+a^p)(1+b+\cdots+b^q)(1+c+\cdots+c^r)\cdots\cdots$

15　大小2個のさいころを同時に投げるとき，少なくとも1個は奇数の目が出る場合の数を求めよ．

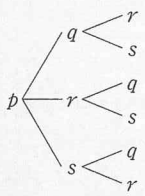
16　大中小3個のさいころを同時に投げるとき，その目の積が偶数になる場合の数を求めよ．

17　1から10までの数字を1つずつ書いた10個の赤い玉が赤い袋に，1から10までの数字を1つずつ書いた10個の青い玉が青い袋にそれぞれ入っている．2種類の袋から1個ずつ玉を取り出すとき，2つの玉に書かれた数の積が3の倍数である場合の数を求めよ．

例題 6　順列

p，q，r，s の4文字から，異なる3個を取って1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか．

解　第1の文字の取り方は4通り．第1の文字に p を取ったときは右の樹形図のようになる．よって，並べ方の総数は，$4\cdot3\cdot2=24$ より，**24通り．**



一般に，異なる n 個のものから r 個を取って1列に並べたものを，n 個のものから r 個取った**順列**といい，その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．

この場合は，${}_4\mathrm{P}_3=4\cdot3\cdot2=24$ と表される．

18　赤，青，黄，緑，黒の5本の旗がある．この中から3本選んで1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか．

19　a，b，c，d，e，f の6人の中から，走る順番を考えて，4人の走者を選ぶとき，選び方は何通りあるか．

例題 7　階乗 $n!$

次の階乗を計算せよ．

(1)　$2!$　　(2)　$5!$　　(3)　$10!$

解　1から n までのすべての自然数の積を n の**階乗**といい，$n!$ で表す．

(1)　$2!=2\cdot1=$**2**　　(2)　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**120**

(3)　$10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$**3628800**

20　次の階乗を計算せよ．

(1)　$3!$　　(2)　$6!$　　(3)　$1!$

(4)　$\dfrac{5!}{2!}$　　(5)　$\dfrac{8!}{3!}$　　(6)　$\dfrac{7!}{6!}$

●ポイント

①　**階乗**　$n!=n(n-1)\cdots\cdots2\cdot1$

例題 8　順列の記号 ${}_nP_r$

次の値を求めよ．

(1) ${}_5P_2$　　(2) ${}_7P_3$　　(3) ${}_{12}P_4$

解 (1) ${}_5P_2=\dfrac{5!}{(5-2)!}=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=5\cdot4=\mathbf{20}$

(2) ${}_7P_3=7\cdot6\cdot5=\mathbf{210}$　　〔注〕 慣れたら，(2)のように計算するとよい．

(3) ${}_{12}P_4=12\cdot11\cdot10\cdot9=\mathbf{11880}$

21 次の値を求めよ．

(1) ${}_6P_2$　　(2) ${}_{10}P_2$　　(3) ${}_6P_5$

(4) ${}_4P_4$　　(5) ${}_{100}P_1$　　(6) ${}_8P_4$

(7) $\dfrac{{}_7P_4}{{}_6P_3}$　　(8) $\dfrac{{}_9P_1}{{}_9P_2}$　　(9) $\dfrac{{}_4P_3}{{}_6P_4}$

例題 9　順列 ${}_nP_r$ の利用

次の問いに答えよ．

(1) 1，2，3，4，5の5個の数字を用いて3桁の整数は何個できるか．ただし，同じ数字をくり返し用いることはできないものとする．

(2) 50人のクラスで，学級委員，副学級委員をそれぞれ1人選ぶ方法は何通りあるか．

解 (1) 5個の異なるものから3個取って並べる並べ方より，${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=\mathbf{60}$**(個)**

(2) 50個の異なるものから2個取って並べる並べ方より，${}_{50}P_2=50\cdot49=\mathbf{2450}$**(通り)**

22 2，3，4，5，6，7の6個の数字を用いて3桁の整数は何個できるか．ただし，同じ数字をくり返し用いることはできないものとする．

23 45人のクラスで，学級委員，図書委員，選挙管理委員をそれぞれ1人選ぶ方法は何通りあるか．ただし，兼任はできないものとする．

24 15冊の異なる本の中から5冊を選んで本棚に並べる方法は何通りあるか．

●ポイント

① 順列　${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$

② ①の式で $r=n$ のとき ${}_nP_n=\dfrac{n!}{0!}$ となる．そこで，$r=n$ のときも成り立つように，$0!=1$ と定める．

③ 実際に順列を使って問題を解くときは，「n 個の異なるものから r 個取って並べる」の n と r がいくつになるかを判断して，${}_nP_r$ の計算を行う．

25 1から8までの8個の数字を用いて4桁の整数は何個できるか．ただし，同じ数字をくり返し用いることはできないものとする．

26 a，b，c，d，e の5個の文字すべてを使ってできる順列の数を求めよ．

27 7人の生徒が1列に並ぶ方法は何通りあるか．

例題 10　整数をつくる順列

6個の数字0，1，2，3，4，5がある．この中から異なる数字を用いて整数をつくるとき，次のような整数は何個できるか．

(1) 3桁の整数

(2) 3桁で400以上の整数

解 (1) 百の位は，1，2，3，4，5の中から1つ選ぶから ${}_5P_1$ 通り．
十の位，一の位は残りの5個の中から2つ選んで並べるから ${}_5P_2$ 通り．
よって，${}_5P_1\times{}_5P_2=5\times5\cdot4=\mathbf{100}$**(個)**

(2) 百の位は，4，5の中から1つ選ぶから，${}_2P_1$ 通り．
十の位，一の位は残り5個の中から2つ選んで並べるから ${}_5P_2$ 通り．
よって，${}_2P_1\times{}_5P_2=2\times5\cdot4=\mathbf{40}$**(個)**

28 5個の数字0，1，2，3，4がある．この中から異なる数字を用いて整数をつくるとき，次のような整数は何個できるか．

(1) 3桁の整数

(2) 3桁の整数で両端が奇数のもの

(3) 両端の数字が奇数である5桁の整数

29 6個の数字0，1，2，3，4，5がある．この中から異なる数字を用いて整数をつくるとき，次のような整数は何個できるか．

(1) 4桁の整数

(2) 4桁で3000以上の整数

(3) 両端の数字が奇数である4桁の整数

(4) 3桁の偶数

(5) 6桁の整数

(6) 両端の数字が偶数である6桁の整数

●ポイント

① ${}_nP_r$ の公式が直接使えない場合もある．和の法則や積の法則，場合分けをうまく使って求める．

② **29** (4) 一の位が0の場合と0でない場合に分ける．

第①章 場合の数と確率

1 集合と要素の個数

P 4

1 (1)$\in$　(2)$\notin$　(3)$\notin$　(4)$\in$

2 (1)$\{13,\ 26,\ 39,\ 52\}$　(2)$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72\}$　(3)$\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\cdots\}$
(4)$\{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \cdots\cdots\}$

3 (1)ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,\ 1\}$
(2)ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{a,\ d\}$, $\{b,\ c\}$, $\{b,\ d\}$, $\{c,\ d\}$, $\{a,\ b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ d\}$, $\{a,\ c,\ d\}$, $\{b,\ c,\ d\}$, $\{a,\ b,\ c,\ d\}$
(3)ϕ, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$

4 $A=B$

P 5

5 (1)$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　(2)$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12\}$　(3)$A\cap C=\{3,\ 6\}$
(4)$B\cap C=\{6,\ 12\}$

6 (1)$\overline{A}=\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$　(2)$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$　(3)$\overline{A}\cap B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
(4)$A\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

7 (1)$A\cup B=\{a,\ c,\ d,\ f,\ g,\ h\}$　(2)$A\cap B=\{d,\ h\}$　(3)$\overline{A}=\{b,\ c,\ e,\ g\}$　(4)$\overline{B}=\{a,\ b,\ e,\ f\}$
(5)$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{\boldsymbol{a,\ b,\ c,\ e,\ f,\ g}\}$　(6)$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{\boldsymbol{b,\ e}\}$

8 $A=\{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$, $B=\{10,\ 15,\ 20\}$ である.
(1)$A\cup B=\{10,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 20\}$　(2)$A\cap B=\{15\}$
(3)$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{\boldsymbol{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20}\}$　(4)$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{\boldsymbol{12,\ 14,\ 16,\ 18}\}$
(5)$\overline{A}=\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$ より, $\overline{A}\cap B=\{\boldsymbol{10,\ 20}\}$
(6)$\overline{B}=\{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\}$ より, $A\cap\overline{B}=\{\boldsymbol{11,\ 13,\ 17,\ 19}\}$

P 6

9 (1)$n(A)=33$　(2)$n(B)=20$　(3)$n(A\cap B)=6$　(4)$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-33=\mathbf{67}$
(5)$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-20=\mathbf{80}$　(6)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=33+20-6=\mathbf{47}$

10 $n(A)=24-2=22$, $n(B)=14-1=13$ である.
(1)28の倍数の個数だから, $n(A\cap B)=\mathbf{3}$　(2)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+13-3=\mathbf{32}$
(3)$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=90-22=\mathbf{68}$　(4)$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=90-13=\mathbf{77}$
(5)$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=90-3=\mathbf{87}$
(6)$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=90-32=\mathbf{58}$

11 1から200までの自然数の集合をU, Uの部分集合で2の倍数の集合をA, 3の倍数の集合をBとする.
(1)$n(A)=\mathbf{100}$ **(個)**　(2)$n(B)=\mathbf{66}$ **(個)**　(3)$n(A\cap B)=\mathbf{33}$ **(個)**　(4)$n(A\cup B)=100+66-33=\mathbf{133}$ **(個)**
(5)$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=200-133=\mathbf{67}$ **(個)**
(6)$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=200-33=\mathbf{167}$ **(個)**

P 7

12 全校生徒の集合を全体集合U, 女子生徒の集合をA, 70点以上とった生徒の集合をBとする.
(1)$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=300-170=\mathbf{130}$ **(人)**　(2)$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=300-190=\mathbf{110}$ **(人)**
(3)男子で70点以上とった生徒の人数は, $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=190-104=86$ (人)
よって, 男子で70点未満であった生徒の人数は, $130-86=\mathbf{44}$ **(人)**

13 $A=\{$1000以下の6の倍数$\}$, $B=\{$1000以下の7の倍数$\}$ とする.
(1)166個　(2)142個　(3)23個　(4)$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=166-23=\mathbf{143}$ **(個)**
(5)$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=142-23=\mathbf{119}$ **(個)**

14 $U=\{$Z地区の総世帯$\}$, $A=\{x$新聞をとっている世帯$\}$, $B=\{y$新聞をとっている世帯$\}$ とする.
(1)$332-314=\mathbf{18}$ **(世帯)**
(2)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より, $314=163+193-n(A\cap B)$　よって, $n(A\cap B)=\mathbf{42}$ **(世帯)**

15 $U=\{$Y地区の総世帯$\}$, $A=\{$液晶テレビを所有する世帯$\}$, $B=\{$自動車を所有する世帯$\}$ とする.
(1)$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=500-400=\mathbf{100}$ **(世帯)**
(2)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より, $400=261+290-n(A\cap B)$　よって, $n(A\cap B)=\mathbf{151}$ **(世帯)**
(3)$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=261-151=\mathbf{110}$ **(世帯)**

P 8

16 $U=\{$テストを受けた高校生全員$\}$, $A=\{$Aテストに合格した人$\}$, $B=\{$Bテストに合格した人$\}$,
$C=\{$Cテストに合格した人$\}$, $D=\{$A, B, Cのどれにも合格しなかった人$\}$ とする.
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ において,
$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(D)=214-14=200$ より,
$200=81+97+77-21-25-22+n(A\cap B\cap C)$, $n(A\cap B\cap C)=\mathbf{13}$ **(人)**

17 $U=\{$120人の大学生$\}$, $A=\{$パソコンを持つ人$\}$, $B=\{$スマートフォンを持つ人$\}$, $C=\{$自動車を持つ人$\}$ とすると, $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=84+60+45-46-28-36+20=99$
求める人数は, $n(U)-n(A\cup B\cup C)=120-99=\mathbf{21}$ **(人)**

18 1から1000までの整数の集合をU, Uの部分集合で2, 3, 5の倍数の集合をそれぞれA, B, Cとすると, $n(U)=1000$, $n(A)=500$, $n(B)=333$, $n(C)=200$ である.
(1)$n(A\cap B)=\mathbf{166}$ **(個)**　(2)$n(B\cap C)=\mathbf{66}$ **(個)**　(3)$n(C\cap A)=\mathbf{100}$ **(個)**　(4)$n(A\cap B\cap C)=\mathbf{33}$ **(個)**
(5)$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=500+333+200-166-66-100+33=\mathbf{734}$ **(個)**
(6)10, 15のうち少なくとも1つで割り切れる数である. 10, 15, 30(10と15の最小公倍数)の倍数の集合はそれぞれ$A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$だから, (2)〜(4)より,
$n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)=100+66-33=\mathbf{133}$ **(個)**
〔注〕(6)では次のような関係が成り立つことを用いて考えてもよい.
$n((A\cup B)\cap C)=n((A\cap C)\cup(B\cap C))=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$

P 9　〔混合問題〕

1 (1)$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 8\}$, $\{4,\ 9\}$, $\{5,\ 8\}$, $\{5,\ 9\}$, $\{8,\ 9\}$
(2)①$\overline{A}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ より, $\overline{A}\cup B=\{\boldsymbol{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8}\}$
②$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$ より, $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{\boldsymbol{6,\ 7}\}$

2 $U=\{$学年全体$\}$, $A=\{$バスを利用している人$\}$, $B=\{$電車を利用している人$\}$ とする.
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=238+210-76=372$ より,
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=500-372=\mathbf{128}$ **(人)**

3 $U=\{$P地区の総世帯$\}$, $A=\{$4人以上の家族がいる世帯$\}$, $B=\{$自動車を所有している世帯$\}$ とする.
(1)$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=4500-2750=\mathbf{1750}$ **(世帯)**
(2)$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=4500-3625=\mathbf{875}$ **(世帯)**
(3)3人以下の世帯で, 自動車を所有するのは, $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=3625-2125=1500$ (世帯)
よって, (1)より, $1750-1500=\mathbf{250}$ **(世帯)**

4 3桁の自然数の集合をU, Uの部分集合で6の倍数の集合をA, 9の倍数の集合をBとする. このとき, 6では割り切れるが9では割り切れない数の集合は$A\cap\overline{B}$である. $n(A)=166-16=150$　$A\cap B$は18の倍数の集合なので, $n(A\cap B)=55-5=50$　よって, $n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=150-50=\mathbf{100}$ **(個)**

5 Aの要素$2x$とBの要素$\dfrac{72}{y}$のうち, 等しいものが$A\cap B$となる. $2x=\dfrac{72}{y}\to x=\dfrac{36}{y}$ ……①
ここで, x, yはともに1以上36以下の自然数だから, ①を満たすx, yは,
$(x,\ y)=(1,\ 36)$, $(2,\ 18)$, $(3,\ 12)$, $(4,\ 9)$, $(6,\ 6)$, $(9,\ 4)$, $(12,\ 3)$, $(18,\ 2)$, $(36,\ 1)$
x(またはy)の値から, $A\cap B=\{\boldsymbol{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72}\}$

⑥ $U=\{300人の生徒\}$，$A=\{サッカーが好きな人\}$，$B=\{テニスが好きな人\}$，$C=\{野球が好きな人\}$ とすると，

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=172+128+145-67-60-55+n(A\cap B\cap C)$

より，$n(A\cap B\cap C)=n(A\cup B\cup C)-263$ ……①

また，$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=300-n(A\cup B\cup C)$

より，$300-n(A\cup B\cup C)=12$，$n(A\cup B\cup C)=300-12=288$ ……②

①，②から，$n(A\cap B\cap C)=288-263=25$

求める人数は，$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=67-25=$**42（人）**

⑦ 100以下の自然数の集合をU，Uの部分集合で2，3，5の倍数の集合をそれぞれA，B，Cとする．

$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=100-n(A\cup B\cup C)$ を求めればよい．

$n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(C)=20$，$n(A\cap B)=16$，$n(B\cap C)=6$，$n(C\cap A)=10$，$n(A\cap B\cap C)=3$ だから，

$n(A\cup B\cup C)=50+33+20-16-6-10+3=74$

求める個数は，$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=100-n(A\cup B\cup C)=100-74=$**26（個）**

2　場合の数・順列

P10

1　123，132，213，231，312，321　　**2**　12通り　　**3**　6通り

P11

4　(1) 6通り　(2)12通り　　**5**　(1)10通り　(2)12通り　(3)16通り

6　(1)和が3…(1，1，1)，和が4…(1，1，2)，和が5…(1，1，3)，(1，2，2)，和が6…(1，1，4)，(1，2，3)，(2，2，2)だから，$1+1+2+3=$**7（通り）**

(2)積が1…(1，1，1)，積が2…(1，1，2)，積が3…(1，1，3)，積が4…(1，1，4)，(1，2，2)，積が5…(1，1，5)，積が6…(1，1，6)，(1，2，3)だから，$1+1+1+2+1+2=$**8（通り）**

7　18通り　　**8**　840通り　　**9**　120通り　　**10**　(1)$4\cdot3=$**12（個）**　(2)$2\cdot3\cdot4=$**24（個）**

P12

11　(1)$648=2^3\cdot3^4$ より，$4\cdot5=$**20（個）**　(2)$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3+3^4)=15\cdot121=$**1815**

12　(1)$540=2^2\cdot3^3\cdot5$ より，$3\cdot4\cdot2=$**24（個）**　(2)$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)=7\cdot40\cdot6=$**1680**

13　$108^m=(2^2\cdot3^3)^m=2^{2m}\cdot3^{3m}$ より，$(2m+1)(3m+1)=70$，$6m^2+5m-69=0$，$m=3,\ -\dfrac{23}{6}$

mは自然数なので，$\boldsymbol{m=3}$

14　(1)$300=2^2\cdot3\cdot5^2$ より，正の約数の2乗の総和は，

$\{1^2+2^2+(2^2)^2\}(1^2+3^2)\{1^2+5^2+(5^2)^2\}=21\cdot10\cdot651=$**136710**

(2)正の約数の逆数の総和は，$\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}\right)=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{31}{25}=\boldsymbol{\dfrac{217}{75}}$

P13

15　すべての場合の数から，両方とも偶数の目が出る場合の数をひく．$6^2-3^2=$**27（通り）**

16　すべての場合の数から，3つとも奇数の目が出る場合の数をひく．$6^3-3^3=$**189（通り）**

17　1から10までのうち，3の倍数でない数は7つある．すべての場合の数から，両方とも3の倍数でない場合の数をひく．$10^2-7^2=$**51（通り）**

18　60通り　　**19**　360通り　　**20**　(1) 6　(2)720　(3)1　(4)60　(5)6720　(6)7

P14

21　(1)30　(2)90　(3)720　(4)24　(5)100　(6)1680　(7)7　(8)$\dfrac{1}{8}$　(9)$\dfrac{1}{15}$

22　${}_6P_3=$**120（個）**　　**23**　${}_{45}P_3=$**85140（通り）**　　**24**　${}_{15}P_5=$**360360（通り）**

P15

25　${}_8P_4=$**1680（個）**　　**26**　${}_5P_5=$**120**　　**27**　${}_7P_7=$**5040（通り）**

28　(1)${}_4P_1\times{}_4P_2=$**48（個）**

(2)両端には，1と3の2つを並べるから${}_2P_2$通り，十の位には残りの3個の中から1つ選ぶから${}_3P_1$通り．よって，${}_2P_2\times{}_3P_1=$**6（個）**

(3)${}_2P_2\times{}_3P_3=$**12（個）**

29　(1)${}_5P_1\times{}_5P_3=$**300（個）**

(2)千の位には，3，4，5のどれかが入るから${}_3P_1$通り，あとは残りの5個の中から3つ選んで並べるから${}_5P_3$通り．${}_3P_1\times{}_5P_3=$**180（個）**

(3)${}_3P_2\times{}_4P_2=$**72（個）**

(4)一の位が0のものは${}_5P_2=20$（個），一の位が2または4のものは，百の位が0と一の位の数以外の4通りだから，${}_2P_1\times{}_4P_1\times{}_4P_1=32$（個），全部で**52個**.

(5)${}_5P_1\times{}_5P_5=$**600（個）**

(6)一の位が0のものは${}_2P_1\times{}_4P_4=48$（個），一の位が2または4のものは${}_2P_2\times{}_4P_4=48$（個），全部で**96個**.

P16

30　${}_5P_5\times{}_2P_2=$**240（通り）**　　**31**　${}_4P_4\times{}_2P_2=$**48（通り）**

32　(1)${}_5P_5\times{}_2P_2=$**240（個）**　(2)${}_4P_4\times{}_3P_3=$**144（個）**　(3)${}_4P_4\times{}_2P_2=$**48（個）**

P17

33　$(5-1)!=$**24（通り）**　　**34**　$(6-1)!=$**120（通り）**　　**35**　$(8-1)!=$**5040（通り）**

36　(1)$(9-1)!=$**40320（通り）**　(2)玉に糸を通して裏返しにしても同じ首飾りになるから，$\dfrac{(9-1)!}{2}=$**20160（通り）**

37　$5^3=$**125（通り）**　　**38**　$5^4=$**625（個）**　　**39**　$6^4=$**1296（通り）**　　**40**　$3^7=$**2187（通り）**

P18　〔混合問題〕

1　$1350=2\cdot3^3\cdot5^2$ より，正の約数の個数は，$2\cdot4\cdot3=$**24（個）**

これらの総和は，$(1+2)(1+3+3^2+3^3)(1+5+5^2)=3\cdot40\cdot31=$**3720**

2　${}_{10}P_7=$**604800（通り）**

3　一の位には，1，3，5のどれかが入るから${}_3P_1$通り，万の位には，一の位の数と0以外の5個の数のうちのどれかが入るから${}_5P_1$通り，あとは残りの5個の中から3つ選んで並べるから${}_5P_3$通り．

${}_3P_1\times{}_5P_1\times{}_5P_3=$**900（個）**

4　特定の女子2人を1人とみる．${}_6P_6\times{}_2P_2=$**1440（通り）**

5　$\dfrac{(8-1)!}{2}=$**2520（通り）**　　**6**　$3^5=$**243（通り）**

7　異なる7文字を並べるから，$7!=$**5040（通り）**

これを辞書式に配列するとき，MEIGAKUより前には，はじめの文字がA，E，G，I，Kのいずれかのもの$6!\times5=3600$（個），はじめの文字がMのもの（MA…の形）$5!=120$（個），ME…の形のもの（MEA…またはMEG…の形）$4!\times2=48$（個），MEI…の形のもの（MEIA…の形）$3!=6$（個）の合計3774個あるから，MEIGAKUは**第3775番目**.

8　(1)${}_8P_8\times{}_2P_2=$**80640（通り）**

(2)eとuを偶数番目（下の図の4つの●のうちのどれか2か所）に並べて，${}_4P_2$通り．

○●○●○●○●○

その他の7つの文字は，残りの7か所に並べるから${}_7P_7$通り．${}_4P_2\times{}_7P_7=$**60480（通り）**

9　2つの底面の上下を区別すると，塗り方は${}_8P_2=56$（通り）．上下の区別を外すと，$56\div2=28$（通り）．

一方，側面の塗り方は，$(6-1)!=120$（通り）．よって，$28\times120=$**3360（通り）**

10　(1)$2^5=$**32（通り）**

(2)全員がAまたはBに入る2通りを除いてから，A，Bの区別を外す．$(32-2)\div{}_2P_2=$**15（通り）**

〔注〕一般に，n人を2つの組に分ける方法は，$(2^n-2)\div{}_2P_2=2^{n-1}-1$（通り）ある．

3　組合せ

P19

1　10通り　　**2**　15通り

3　(1)6　(2)20　(3)35　(4)1　(5)1　(6)8　(7)9　(8)45　(9)330　(10)70　(11)126　(12)252

P20

4　(1)$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$　(2)$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

5　(1)455　(2)30　(3)990　(4)4845　(5)300　(6)4960

6　${}_{10}C_4=$**210(通り)**　　**7**　${}_{40}C_2=$**780(通り)**　　**8**　${}_{35}C_3=$**6545(通り)**

P21

9　${}_6C_3=$**20(通り)**　　**10**　${}_8C_2=$**28(試合)**　　**11**　(1)${}_{20}C_3=$**1140**　(2)${}_{10}C_3=$**120**　(3)${}_{14}C_3=$**364**

12　(1)${}_8C_3=$**56(個)**　(2)${}_nC_3=$**$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$(個)**　(3)${}_{10}C_4=$**210(個)**

13　(1)直線は通る2点で定まるから，${}_9C_2=$**36(本)**　(2)三角形は3頂点で定まるから，${}_9C_3=$**84(個)**

14　(1)${}_7C_2=$**21(個)**　(2)${}_7C_3=$**35(個)**

15　(1)8個　(2)正八角形の特定の1辺だけを共有する三角形は4個あるから，全部で，8·4=**32(個)**
(3)${}_8C_3-(8+32)=$**16(個)**

P22

16　(1)${}_{11}C_4=$**330(通り)**　(2)${}_5C_2\times{}_6C_2=$**150(通り)**　(3)${}_5C_3\times{}_6C_1=$**60(通り)**

17　(1)${}_{15}C_{12}=$**455(通り)**　(2)${}_5C_3\times{}_{10}C_9=$**100(通り)**　(3)${}_{13}C_{10}=$**286(通り)**　(4)${}_{13}C_{12}=$**13(通り)**
(5)上の(1)と(4)から，455−13=**442(通り)**

18　(1)${}_{13}C_5=$**1287(通り)**　(2)${}_8C_3\times{}_5C_2=$**560(通り)**　(3)${}_6C_1\times{}_5C_2=$**60(通り)**　(4)${}_7C_1\times{}_4C_2=$**42(通り)**

19　${}_5C_2\times{}_6C_2=$**150(個)**　　**20**　${}_6C_2\times{}_6C_2=$**225(個)**

P23

21　${}_9C_3\times{}_6C_3=$**1680(通り)**

22　(1)${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2=$**2520(通り)**　(2)${}_8C_3\times{}_5C_2\times{}_3C_1=$**1680(通り)**

23　(1)${}_{12}C_5\times{}_7C_4=$**27720(通り)**　(2)$\dfrac{{}_{12}C_6}{2!}=$**462(通り)**　(3)$\dfrac{{}_{12}C_4\times{}_8C_4}{3!}=$**5775(通り)**
(4)$\dfrac{{}_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3}{4!}=$**15400(通り)**

24　(1)10人を4人の組A，Bと2人の組Cとに分けると，その分け方は${}_{10}C_4\times{}_6C_4=3150$(通り)あるが，A，Bを区別しないので，3150÷2!=**1575(通り)**
(2)$\dfrac{{}_{10}C_2\times{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_3}{3!}=$**12600(通り)**　(3)$\dfrac{{}_{10}C_3\times{}_7C_3\times{}_4C_2}{2!2!}=$**6300(通り)**

P24

25　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=$**90(通り)**　　**26**　$\dfrac{8!}{2!3!3!}=$**560(通り)**

27　$\dfrac{11!}{4!3!2!2!}=$**69300(通り)**　　**28**　$\dfrac{7!}{2!2!}=$**1260(通り)**

29　(1)KKを1つの文字とみると，異なる文字4個と同じ文字3個を並べる方法と同じになる．$\dfrac{7!}{3!}=$**840(通り)**
(2)すべての並べ方は，$\dfrac{8!}{2!3!}=3360$(通り)で，これから(1)の場合を除いて，3360−840=**2520(通り)**

30　1の位の数は1か3である．1の位の数が1のとき，$\dfrac{6!}{2!2!}=180$(通り)，
1の位の数が3のとき，$\dfrac{6!}{3!2!}=60$(通り)より，180+60=**240(通り)**

P25

31　AからBへは，${}_{10}C_4=$**210(通り)**，Cを通るものは，${}_5C_2\times{}_5C_2=$**100(通り)**
〔別解〕$\dfrac{10!}{4!6!}=210$(通り)，$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=100$(通り)

32　AからBへは，${}_{11}C_5=$**462(通り)**，Cを通るものは，${}_7C_3\times{}_4C_2=210$(通り)　よって，462−210=**252(通り)**
〔別解〕$\dfrac{11!}{5!6!}=462$(通り)，$\dfrac{11!}{5!6!}-\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=252$(通り)

33　C，Dを通るものは，${}_4C_2\times{}_7C_2=$**126(通り)**，E，F間を通らないものは，${}_{12}C_5-{}_6C_2\times{}_5C_2=$**642(通り)**
〔別解〕$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{2!5!}=126$(通り)，$\dfrac{12!}{5!7!}-\dfrac{6!}{2!4!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=642$(通り)

34　Cを通るものは，${}_6C_2\times{}_7C_4=525$(通り)，Dを通るものは，${}_7C_3\times{}_6C_3=700$(通り)，C，D両方を通るものは，${}_6C_2\times{}_6C_3=300$(通り)より，525+700−300=**925(通り)**
〔別解〕$\dfrac{6!}{2!4!}\times\dfrac{7!}{4!3!}+\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{6!}{3!3!}-\dfrac{6!}{2!4!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=925$(通り)

P26

35　$\dfrac{13!}{11!2!}=$**78(通り)**　　**36**　(1)$\dfrac{22!}{20!2!}=$**231(通り)**　(2)$\dfrac{19!}{17!2!}=$**171(通り)**

37　○を6つ並べてそれらの間または両端に仕切り｜を4本入れる．左から1番目の仕切りの左側にある○の個数だけ1を取り，1番目の仕切りと2番目の仕切りの間にある○の個数だけ2を取る．以下同様にして，1から5までの数字を6つ取り出す方法がちょうど1つ決まる．　○｜○｜｜○○｜○○
よって，右のような仕切りの入れ方(○を6個，｜を4本並べる並べ方)の数として，$\dfrac{10!}{6!4!}=$**210(通り)**

38　前問と同様にして，8個並べた○の間または両端に2本の仕切りを入れる入れ方の数(同じ場所に2本の仕切りを入れてもよい)から，$\dfrac{10!}{8!2!}=$**45(組)**　○○｜○○○○｜○○

39　8つ並べた○の間(両端は除く)に2本の仕切りを入れる入れ方の数(同じ場所には1本の仕切りしか入れない)から，$\dfrac{7!}{5!2!}=$**21(通り)**　○○○○○○○○
↑↑↑↑↑↑↑
〔別解〕3人の子供に分ける菓子の個数をx，y，zとすると，次のような方程式を満たす(x，y，z)は何通りあるかを求めればよい．$x+y+z=8$(x，y，zは自然数)……①　ここで，$x=X+1$，$y=Y+1$，$z=Z+1$とおき，①に代入すると，①は次のような問題におきかわる．$X+Y+Z=5$(X，Y，Zはともに0以上)　よって，5個の○と2つの｜を並べる並べ方に等しくなり，$\dfrac{7!}{5!2!}=21$(通り)

P27　〔混合問題〕

1　(1)特定の3人以外の17人から4人選ぶのと同じだから，${}_{17}C_4=$**2380(通り)**
(2)すべての選び方は，${}_{20}C_5=15504$(通り)，男子だけ選ぶ選び方は，${}_9C_5=126$(通り)，女子だけ選ぶ選び方は，${}_{11}C_5=462$(通り)だから，15504−126−462=**14916(通り)**

2　2点を結ぶ線分の数から辺の数をひく．${}_nC_2-n=\dfrac{n(n-1)}{2}-n=$**$\dfrac{n(n-3)}{2}$**

3　${}_7C_2\times{}_4C_2=$**315(個)**

4　(1)${}_8C_3\times{}_4C_3=$**280(通り)**　(2)$\dfrac{{}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_1}{2!2!}=$**280(通り)**　　**5**　${}_4C_2\times{}_3C_2\times{}_3C_1=$**54(通り)**

6　15個の○の間の14か所に11のスペースと3つの｜を並べると考えて，$\dfrac{14!}{11!3!}=$**364(組)**