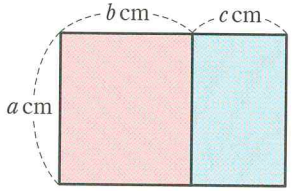
# 1 多項式の計算

## 単項式と多項式の乗法

次の図のような長方形の面積について考えてみよう。




**考え方1**　縦　$a$ cm，　横　$(b+c)$ cm
の長方形と考えると，その面積は
$a(b+c)$ cm$^2$　……①

**考え方2**　縦　$a$ cm，　横　$b$ cm
縦　$a$ cm，　横　$c$ cm
の2つの長方形を合わせたものと考えると，その面積は
$(ab+ac)$ cm$^2$　……②

①と②は，同じ長方形の面積を表しているから，等しい。
このことは，次の **分配法則** が成り立つことを示している。

$$a(b+c)=ab+ac$$

単項式と多項式の乗法は，数の場合と同じように，分配法則を用いて次のように計算する。

**例 1**

(1)　$3a(2b+5)=3a\times 2b+3a\times 5$
$=6ab+15a$

(2)　$(x+3y-2xy)\times(-4x)$　　$(a+b)c=ac+bc$
$=x\times(-4x)+3y\times(-4x)-2xy\times(-4x)$
$=-4x^2-12xy+8x^2y$

**練習 1**　次の計算をしなさい。

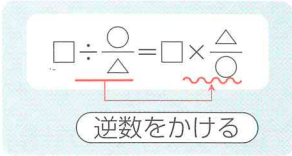
(1)　$4a(a-2b)$　　(2)　$-x(5x-2y)$
(3)　$(2a-3b+c)\times 3d$　　(4)　$(3x-2y-z)\times(-3x)$



## 単項式と多項式の除法

多項式を単項式でわる除法について考えてみよう。

式の除法では，数の場合と同じように，わるものの逆数をかければよい。
また，約分できる場合には，できる限り約分しておく。




**例 2**

(1)　$(12a^2-9a)\div 3a=(12a^2-9a)\times\dfrac{1}{3a}$　←$3a$ の逆数は $\dfrac{1}{3a}$
$=\dfrac{12a^2}{3a}-\dfrac{9a}{3a}$
$=4a-3$

(2)　$(x^2y-3xy^2-2xy)\div\dfrac{1}{2}xy$
$=(x^2y-3xy^2-2xy)\times\dfrac{2}{xy}$　←$\dfrac{1}{2}xy$ の逆数は $\dfrac{2}{xy}$
$=\dfrac{x^2y\times 2}{xy}-\dfrac{3xy^2\times 2}{xy}-\dfrac{2xy\times 2}{xy}$
$=2x-6y-4$

**練習 2**　次の逆数を求めなさい。

(1)　$2x$　　(2)　$-5ab$　　(3)　$\dfrac{xy}{6}$　　(4)　$-\dfrac{3}{4}ab$　　(5)　$-0.5x$

**練習 3**　次の計算をしなさい。

(1)　$(12a^2b+8ab^2)\div 4ab$　　(2)　$(6x^2y-9xy^2)\div 3xy$
(3)　$(2a^2+6ab)\div\left(-\dfrac{a}{3}\right)$　　(4)　$(6x^2+8xy-2x)\div\dfrac{2}{3}x$

## 多項式の乗法

$(a+b)\times(c+d)$ のような，多項式と多項式の乗法について考えてみよう。$(a+b)\times(c+d)$ は，記号 × を省略して $(a+b)(c+d)$ と表すことが多い。

$(a+b)(c+d)$ の計算において，$c+d$ を1つのものとみて，これを $M$ とおくと

$$(a+b)M$$

の計算となる。

これは，多項式と単項式の乗法であるから，分配法則を用いて，次のように計算することができる。

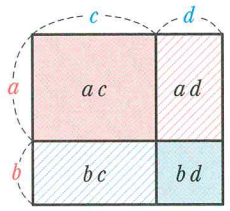
$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)&=(a+b)M\\&=aM+bM\end{aligned}$$

ここで，$M$ を $c+d$ に戻すと

$$\begin{aligned}&aM+bM\\&=a(c+d)+b(c+d)\\&=ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

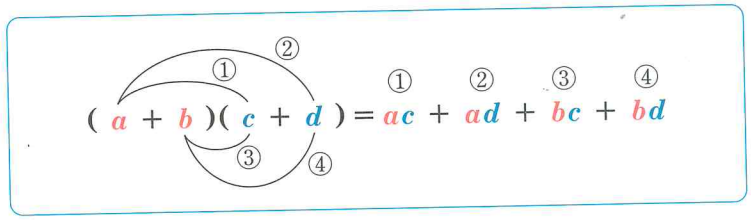



$a$，$b$，$c$，$d$ が正の数のときには，図を用いて確かめることもできる。

単項式と多項式の乗法，あるいは，多項式と多項式の乗法において，かっこをはずして単項式の和の形に表すことを，もとの式を **展開**（てんかい） するという。



$(a+b)(c+d)$ を展開すると，下の図のように，4つの単項式の和の形で表される。




注意　$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ と展開してもよい。

**例 3**

(1)　$(x+2)(y-3)=xy-3x+2y-6$

(2)　$(3a+4)(2a-1)=6a^2-3a+8a-4$
$=6a^2+5a-4$

注意　例3 (2) のように，展開した式が同類項を含むときには，同類項をまとめて簡単な形にしておく。

**練習 4**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+3)(y+5)$　　(2)　$(x-1)(y+4)$

(3)　$(a-2b)(c-5d)$　　(4)　$(2a+1)(3a+2)$

(5)　$(3x-5)(2x-3)$　　(6)　$(5x+2y)(3x-y)$

次のように，かっこの中の項が３つ以上の場合でも，分配法則を用いて展開することができる。

**例 4**

(1) $(4a-b)(a+b-3)$

$=4a(a+b-3)-b(a+b-3)$

$=4a^2+4ab-12a-ab-b^2+3b$

$=4a^2+3ab-b^2-12a+3b$

(2) $(3x-4y-2)(5x-y)$

$=3x(5x-y)-4y(5x-y)-2(5x-y)$

$=15x^2-3xy-20xy+4y^2-10x+2y$

$=15x^2-23xy+4y^2-10x+2y$

$a+b-3$ を $M$ とおくと

$(4a-b)M$

$=4aM-bM$

**練習 5** 次の式を展開しなさい。

(1) $(a-2b)(a+3b+1)$　　(2) $(4x-3y+1)(2x+y)$

(3) $(2a+5b-3)(3a+2b+2)$　　(4) $(2x-3y-1)(x-y-2)$

これまでに学んだ分配法則による方法が，式の展開の基本である。

次に，代表的な式の展開を，公式として使えるようにしよう。

## $(x+a)(x+b)$ の展開

$(x+2)(x+3)$ を展開したとき，$x$ の係数，および定数項はどのようになるか考えてみよう。

$$(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+2\times3$$
$$=x^2+\underbrace{(2+3)}_{\text{和}}x+\underbrace{2\times3}_{\text{積}}$$

上の計算より

$x$ の係数は「2 と 3 の和」，定数項は「2 と 3 の積」

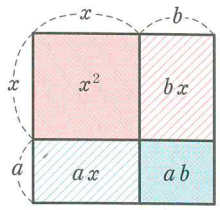
になっていることがわかる。



一般に，次のことが成り立つ。

**$(x+a)(x+b)$ の展開**

[1] $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$




**例 5**

(1) $(x+1)(x+4)$

$=x^2+(1+4)x+1\times4$

$=x^2+5x+4$

$(x+a)(x+b)$

$\downarrow$　$\downarrow$

$(x+1)(x+4)$

(2) $(x+2)(x-5)$

$=x^2+(2-5)x+2\times(-5)$

$=x^2-3x-10$

$(x+a)(x+b)$

$\downarrow$　$\downarrow$

$(x+2)(x-5)$

**練習 6** 次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2)(x+7)$　　(2) $(x+6)(x-4)$

(3) $(y-2)(y-4)$　　(4) $(a-9)(a+3)$

**例 6**

$(2a-3)(2a+7)$

$=(2a)^2+(-3+7)\times2a+(-3)\times7$

$=4a^2+8a-21$

$2a$ を $M$ とおくと

$(M-3)(M+7)$

$=M^2+(-3+7)M$

$+(-3)\times7$

**練習 7** 次の式を展開しなさい。

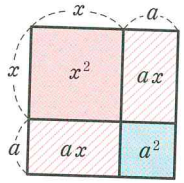
(1) $(3a+1)(3a+5)$　　(2) $(4x-1)(4x+5)$

(3) $(2x+7)(2x-9)$　　(4) $(5y-8)(5y-2)$

## $(x+a)^2$，$(x-a)^2$ の展開

$(x+a)^2$，$(x-a)^2$ を展開すると，それぞれ次のようになる。

$$(x+a)^2=(x+a)(x+a)$$
$$=x^2+(a+a)x+a\times a$$
$$=x^2+2ax+a^2$$




同様に　$(x-a)^2=(x-a)(x-a)$
$$=x^2+(-a-a)x+(-a)\times(-a)$$
$$=x^2-2ax+a^2$$

### $(x+a)^2$，$(x-a)^2$ の展開

[2]　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$　(和の平方の公式)

[3]　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$　(差の平方の公式)

**例 7**

(1)　$(x+3)^2=x^2+2\times3\times x+3^2$
$=x^2+6x+9$

(2)　$(x-5)^2=x^2-2\times5\times x+5^2$
$=x^2-10x+25$

**練習 8**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+4)^2$　　(2)　$(y+7)^2$　　(3)　$(x-2)^2$　　(4)　$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$

**例 8**

(1)　$(5x+y)^2=(5x)^2+2\times y\times5x+y^2$
$=25x^2+10xy+y^2$

(2)　$(4a-5b)^2=(4a)^2-2\times5b\times4a+(5b)^2$
$=16a^2-40ab+25b^2$

**練習 9**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-4y)^2$　　(2)　$(-a+8b)^2$　　(3)　$(2x+5y)^2$



## $(x+a)(x-a)$ の展開

$(x+a)(x-a)$ を展開すると，次のようになる。

$$(x+a)(x-a)=x^2+(a-a)x+a\times(-a)$$
$$=x^2-a^2$$

### $(x+a)(x-a)$ の展開

[4]　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$　(和と差の積の公式)

**例 9**

(1)　$(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$

(2)　$(a-5)(a+5)=a^2-5^2=a^2-25$

**練習 10**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+4)(x-4)$　　(2)　$(a-7)(a+7)$

**例 10**

(1)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2)　$(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$

**練習 11**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+2y)(x-2y)$　　(2)　$(4a-5b)(4a+5b)$

(3)　$\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)$　　(4)　$(b+3a)(3a-b)$

これまでに学んだ展開の公式をまとめると，次のようになる。

[1]　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

[2]　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

[3]　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

[4]　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

## 展開の公式の一般化

これまでに学んだ展開の公式を，一般化してみよう。

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると，次のようになる。

$$(ax+b)(cx+d)=ax\times cx+ax\times d+b\times cx+b\times d$$
$$=acx^2+adx+bcx+bd$$
$$=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

**展開の公式**

[5]　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

**例 11**

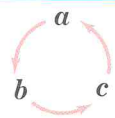
$$(2x+5)(3x-1)=2\times3\times x^2+\{2\times(-1)+5\times3\}x+5\times(-1)$$
$$=6x^2+(-2+15)x-5$$
$$=6x^2+13x-5$$

**練習 12**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(2x+1)(x+5)$　　(2)　$(3x-4)(5x+3)$　　(3)　$(4a-1)(2a-7)$

$(a+b+c)^2$ は，$a+b$ を $M$ とおくと，次のように展開できる。

$$(a+b+c)^2=(M+c)^2$$
$$=M^2+2Mc+c^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$



〔輪環の順〕

**注意**　上のような場合，$ab$，$bc$，$ca$ の項の順に式を整理することが多い。

**練習 13**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(a+b-c)^2$　　(2)　$(x+2y+3z)^2$



おきかえの考え方を利用した式の展開を，さらに考えてみよう。

**例題 1**　次の式を展開しなさい。

$$(x+y-2)(x+y+5)$$

**考え方**　展開する式の両方のかっこ内に共通に含まれている $x+y$ を $M$ と考えると，$(M-2)(M+5)$ の展開になる。

**解答**

$$(x+y-2)(x+y+5)$$
$$=\{(x+y)-2\}\{(x+y)+5\}$$
$$=(x+y)^2+3(x+y)-10$$
$$=x^2+2xy+y^2+3x+3y-10$$ 答

$x+y$ を $M$ とおくと
$(M-2)(M+5)$
$=M^2+3M-10$

**練習 14**　次の式を展開しなさい。

(1)　$(a+2b+1)(a+2b-3)$　　(2)　$(2x-y-4)(2x-y+2)$

展開と加法，減法を組み合わせた式を計算してみよう。

**例題 2**　次の計算をしなさい。

$$(4x-1)^2-(2x+3)(8x-5)$$

**解答**

$$(4x-1)^2-(2x+3)(8x-5)$$
$$=(16x^2-8x+1)-(16x^2+14x-15)$$
$$=16x^2-8x+1-16x^2-14x+15$$
$$=-22x+16$$ 答

**練習 15**　次の計算をしなさい。

(1)　$(x+6)(x-6)-(x+3)(x-4)$　　(2)　$(x+4y)^2+(3x+y)(x-3y)$

展開する順序や，項の順序を入れかえてから展開することによって，計算が簡単になることがある。

**例題 3** 次の式を展開しなさい。

$$(x+1)^2(x-1)^2$$

**解答**

$$\begin{aligned}(x+1)^2(x-1)^2&=(x+1)(x+1)(x-1)(x-1)\\&=\{(x+1)(x-1)\}^2 \quad \text{和と差の積の公式}\\&=(x^2-1)^2 \quad \text{差の平方の公式}\\&=(x^2)^2-2x^2+1\\&=x^4-2x^2+1 \quad \text{答}\end{aligned}$$

**練習 16** 次の式を展開しなさい。

(1) $(a-3)^2(a+3)^2$　　(2) $(2x+3y)^2(2x-3y)^2$

**例題 4** 次の式を展開しなさい。

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

**解答**

$$\begin{aligned}&(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\\&=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\} \quad \text{和と差の積の公式}\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\&=(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2\\&=a^4+a^2b^2+b^4 \quad \text{答}\end{aligned}$$

**練習 17** 次の式を展開しなさい。

(1) $(2x+y+z)(2x+y-z)$　　(2) $(a^2+2ab+3b^2)(a^2-2ab+3b^2)$



# 2 因数分解

## 因数分解

$(x+2)(x+3)$ を展開すると，次のようになる。

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

逆に考えると，$x^2+5x+6$ は，次のように積の形で表すことができる。

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

このように，1つの式が多項式や単項式の積の形に表されるとき，積をつくっている1つ1つの式を，もとの式の **因数** という。

また，多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを，もとの式を **因数分解** するという。

$$\underbrace{(x+2)}_{\text{因数}}\underbrace{(x+3)}_{\text{因数}} \underset{\text{因数分解}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}} x^2+5x+6$$

## 共通な因数でくくる因数分解

すべての項に共通な因数を含む多項式は，分配法則を展開とは逆に使って，共通な因数をかっこの外にくくり出すことで因数分解できる。

$M$ は共通な因数

$$Mx+My=M(x+y)$$

**例 1**

(1) $2x^2-3xy=x\times 2x-x\times 3y$
$=x(2x-3y)$

$2x^2=2\times x\times x$
$3xy=3\times x\times y$

(2) $3a^2b-9ab=3ab\times a-3ab\times 3$
$=3ab(a-3)$

$3a^2b=3\times a\times a\times b$
$9ab=3\times 3\times a\times b$

**注意** 例1(2)では，$3(a^2b-3ab)$ や $a(3ab-9b)$ とはせずに，くくり出すことができる数や式は，すべてかっこの外にくくり出す。

**練習 1** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $12x^3-8x^2y$　　(2) $3a^2x+6ax^2-2ax$

## 展開の公式を利用した因数分解

展開の公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ を利用した因数分解について考えてみよう。

**$x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解**

[1] $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

上の式の左辺では，$x$ の係数は $a$ と $b$ の和，定数項は $a$ と $b$ の積になっている。

$x^2+(a+b)x+ab$
$x^2+5x+6$

たとえば $x^2+5x+6$ を因数分解するときには

積が 6 となる 2 つの数の組のうち，和が 5 となるもの

を考えればよい。

右の表のように考えると，このような 2 つの数の組は 2 と 3 である。

よって，$a=2$，$b=3$ として

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

$(x+3)(x+2)$ と書いてもよい

| 積が 6 | 和が 5 |
|---|---|
| 1 と 6 | × |
| 2 と 3 | ○ |
| −1 と −6 | × |
| −2 と −3 | × |

**例 2** $x^2-2x-15$ を因数分解する。

和が −2，積が −15 となる 2 つの数は 3 と −5 である。

よって

$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$

| 積が −15 | 和が −2 |
|---|---|
| 1 と −15 | × |
| 3 と −5 | ○ |
| −1 と 15 | × |
| −3 と 5 | × |

注意 $ab$ が正のときは，$a$，$b$ は同符号； $ab$ が負のときは，$a$，$b$ は異符号

**練習 2** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+7x+12$　(2) $x^2-12x+27$　(3) $x^2+2x-8$

(4) $x^2-5x-6$　(5) $a^2-7a+6$　(6) $y^2-y-20$



展開の公式 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$，$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ を利用した因数分解について考えてみよう。

**$x^2+2ax+a^2$，$x^2-2ax+a^2$ の因数分解**

[2] $\boldsymbol{x^2+2ax+a^2=(x+a)^2}$

[3] $\boldsymbol{x^2-2ax+a^2=(x-a)^2}$

**例 3** (1) $x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2$
$=(x+5)^2$

$x^2+2ax+a^2$
$x^2+2\times5\times x+5^2$

(2) $x^2-14xy+49y^2=x^2-2\times7y\times x+(7y)^2$
$=(x-7y)^2$

(3) $9x^2+24ax+16a^2=(3x)^2+2\times4a\times3x+(4a)^2$
$=(3x+4a)^2$

**練習 3** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+12x+36$　(2) $a^2-18a+81$　(3) $4x^2+4x+1$

(4) $x^2-16xy+64y^2$　(5) $25x^2-70xy+49y^2$

展開の公式 $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ を利用した因数分解について考えてみよう。

**$x^2-a^2$ の因数分解**

[4] $\boldsymbol{x^2-a^2=(x+a)(x-a)}$

**例 4** (1) $x^2-25=x^2-5^2=(x+5)(x-5)$

(2) $16x^2-9y^2=(4x)^2-(3y)^2$
$=(4x+3y)(4x-3y)$

$x^2-a^2$
$x^2-5^2$

**練習 4** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-36$　(2) $a^2-49$　(3) $x^2-16y^2$　(4) $25x^2-64a^2$

展開の公式

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

を利用した因数分解について考えてみよう。

### $acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解

[5]　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$3x^2+14x+8$ を因数分解してみよう。

そのためには，上の公式において

$ac=3$，$ad+bc=14$，$bd=8$

となる $a$，$b$，$c$，$d$ をみつければよい。

$$\begin{array}{ccccc} a & b & \longrightarrow & bc \\ c & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & bd & & ad+bc \end{array}$$

$3x^2+14x+8$

[1]　$ac=3$ の 3 を　$1\times3$

$bd=8$ の 8 を　$1\times8$，$2\times4$，$4\times2$，$8\times1$

などのように，積の形に分解する。

[2]　$a=1$，$c=3$ として，$b$，$d$ の候補から

$$ad+bc=14$$

となるものを上の図のような形式で計算してみると，右の場合が適する。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & \longrightarrow & 12 \\ 3 & 2 & \longrightarrow & 2 \\ \hline 3 & 8 & & 14 \end{array}$$

このとき

$$a=1,\ b=4,\ c=3,\ d=2$$

である。

よって，$3x^2+14x+8$ を因数分解すると，次のようになる。

$$3x^2+14x+8=(x+4)(3x+2)$$

注意　上のような図を利用して因数分解することを「たすきがけ による因数分解」とよぶことがある。



**例 5**　(1)　$2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

(2)　$4x^2-8ax-5a^2=(2x+a)(2x-5a)$

(1)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 2 & 3 & & -5 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1a & \longrightarrow & 2a \\ 2 & -5a & \longrightarrow & -10a \\ \hline 4 & -5a^2 & & -8a \end{array}$$

**練習 5**　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$2x^2+3x+1$　　(2)　$4x^2-15x+9$　　(3)　$6x^2-5x-6$

(4)　$3x^2-2xy-y^2$　　(5)　$3a^2-14ab+8b^2$　　(6)　$4a^2+7ab-2b^2$

## いろいろな因数分解

共通な文字や数をくくり出してから公式を適用する因数分解や，公式をくり返し使う因数分解について考えてみよう。

**例題 1**　次の式を因数分解しなさい。

$$2ax^2-4ax-30a$$

考え方　まず，共通な文字や数をくくり出し，そのあと，因数分解の公式を使う。

**解答**　$2ax^2-4ax-30a=2a(x^2-2x-15)$

$=2a(x+3)(x-5)$　答

**練習 6**　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$3ax^2-24ax+36a$　　(2)　$\frac{1}{2}a^2x-\frac{9}{2}b^2x$

(3)　$-ab^2+a$　　(4)　$x^3y+4x^2y+4xy$

**例題 2** 次の式を因数分解しなさい。

$$x^4-81$$

考え方 まず，$x^4=(x^2)^2$，$81=9^2$ と考えて因数分解する。結果はさらに因数分解できることに注意する。

**解答**

$$\begin{aligned} x^4-81&=(x^2)^2-9^2 \\ &=(x^2+9)(x^2-9) \\ &=(x^2+9)(x^2-3^2) \\ &=(x^2+9)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$ 答

$x^2-a^2$ の因数分解

$x^2-9$ はさらに因数分解できる

**練習 7** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^4-16$　　(2) $81a^4-b^4$

**例題 3** 次の式を因数分解しなさい。

$$x^2+14x+49-y^2$$

考え方 $x^2+14x+49=(x+7)^2$ より，$x+7=M$ とおくと $M^2-y^2$ となる。

**解答**

$$\begin{aligned} x^2+14x+49-y^2&=(x^2+14x+49)-y^2 \\ &=(x+7)^2-y^2 \\ &=\{(x+7)+y\}\{(x+7)-y\} \\ &=(x+y+7)(x-y+7) \end{aligned}$$ 答

$x^2+2ax+a^2$ の因数分解

$x^2-a^2$ の因数分解

**練習 8** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2-6x+9-4y^2$　　(2) $9a^2-16b^2+40b-25$



共通な式を含むときの因数分解について考えてみよう。

**例題 4** 次の式を因数分解しなさい。

$$(x+1)^2+2(x+1)-15$$

考え方 $x+1=M$ とおくと $M^2+2M-15$ となり，公式が利用できる。

**解答**

$$\begin{aligned} (x+1)^2+2(x+1)-15&=\{(x+1)-3\}\{(x+1)+5\} \\ &=(x-2)(x+6) \end{aligned}$$ 答

注意 例題4のような式は，かっこをはずし，式を整理してから因数分解することもできるが，式が複雑になる場合がある。

**練習 9** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x-2)^2-3(x-2)-10$　　(2) $(a+b)^2+4(a+b)-12$

(3) $(x+2y)^2+4(x+2y)z+3z^2$　　(4) $(x+1)^2-6(x+1)+9$

**例題 5** 次の式を因数分解しなさい。

$$ac+ad-bc-bd$$

**解答** $a$ を含む項と含まない項に分けて整理すると

$$\begin{aligned} &ac+ad-bc-bd \\ &=a(c+d)-(bc+bd) \\ &=a(c+d)-b(c+d) \\ &=(a-b)(c+d) \end{aligned}$$ 答

← $c+d=M$ とおくと $aM-bM=(a-b)M$

注意 複数の種類の文字を含む式の因数分解で，解き方の見通しがつきにくい場合は，1つの文字に着目して式を整理するとよい。

**練習 10** 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ac-ad-bc+bd$　　(2) $ax+bx-ay-by+az+bz$

# 第1章　式の計算

## 1　多項式の計算 （本冊 p.6～16）

**練習1** (1) $4a(a-2b)=\mathbf{4a^2-8ab}$

(2) $-x(5x-2y)=\mathbf{-5x^2+2xy}$

(3) $(2a-3b+c)\times 3d$

$=\mathbf{6ad-9bd+3cd}$

(4) $(3x-2y-z)\times(-3x)$

$=\mathbf{-9x^2+6xy+3xz}$

**練習2** (1) $\mathbf{\dfrac{1}{2x}}$

(2) $\dfrac{1}{-5ab}=\mathbf{-\dfrac{1}{5ab}}$

(3) $\mathbf{\dfrac{6}{xy}}$

(4) $-\dfrac{3}{4}ab=\dfrac{-3ab}{4}$ であるから，

逆数は $\dfrac{4}{-3ab}=\mathbf{-\dfrac{4}{3ab}}$

(5) $-0.5x=-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{-x}{2}$ であるから，

逆数は $\dfrac{2}{-x}=\mathbf{-\dfrac{2}{x}}$

**練習3** (1) $(12a^2b+8ab^2)\div 4ab$

$=\dfrac{12a^2b}{4ab}+\dfrac{8ab^2}{4ab}$

$=\mathbf{3a+2b}$

(2) $(6x^2y-9xy^2)\div 3xy=\dfrac{6x^2y}{3xy}-\dfrac{9xy^2}{3xy}$

$=\mathbf{2x-3y}$

(3) $(2a^2+6ab)\div\left(-\dfrac{a}{3}\right)$

$=(2a^2+6ab)\times\left(-\dfrac{3}{a}\right)$

$=\mathbf{-6a-18b}$

(4) $(6x^2+8xy-2x)\div\dfrac{2}{3}x$

$=(6x^2+8xy-2x)\times\dfrac{3}{2x}$

$=\mathbf{9x+12y-3}$

**練習4** (1) $(x+3)(y+5)=\mathbf{xy+5x+3y+15}$

(2) $(x-1)(y+4)=\mathbf{xy+4x-y-4}$

(3) $(a-2b)(c-5d)$

$=\mathbf{ac-5ad-2bc+10bd}$

(4) $(2a+1)(3a+2)=6a^2+4a+3a+2$

$=\mathbf{6a^2+7a+2}$

(5) $(3x-5)(2x-3)$

$=6x^2-9x-10x+15$

$=\mathbf{6x^2-19x+15}$

(6) $(5x+2y)(3x-y)$

$=15x^2-5xy+6xy-2y^2$

$=\mathbf{15x^2+xy-2y^2}$

**練習5** (1) $(a-2b)(a+3b+1)$

$=a(a+3b+1)-2b(a+3b+1)$

$=a^2+3ab+a-2ab-6b^2-2b$

$=\mathbf{a^2+ab-6b^2+a-2b}$

(2) $(4x-3y+1)(2x+y)$

$=4x(2x+y)-3y(2x+y)+(2x+y)$

$=8x^2+4xy-6xy-3y^2+2x+y$

$=\mathbf{8x^2-2xy-3y^2+2x+y}$

(3) $(2a+5b-3)(3a+2b+2)$

$=2a(3a+2b+2)+5b(3a+2b+2)$
$\qquad -3(3a+2b+2)$

$=6a^2+4ab+4a+15ab+10b^2+10b$
$\qquad -9a-6b-6$

$=\mathbf{6a^2+19ab+10b^2-5a+4b-6}$

(4) $(2x-3y-1)(x-y-2)$

$=2x(x-y-2)-3y(x-y-2)$
$\qquad -(x-y-2)$

$=2x^2-2xy-4x-3xy+3y^2+6y$
$\qquad -x+y+2$

$=\mathbf{2x^2-5xy+3y^2-5x+7y+2}$

**練習6** (1) $(x+2)(x+7)$

$=x^2+(2+7)x+2\times 7$

$=\mathbf{x^2+9x+14}$

(2) $(x+6)(x-4)$

$=x^2+(6-4)x+6\times(-4)$

$=\mathbf{x^2+2x-24}$

(3) $(y-2)(y-4)$

$=y^2+(-2-4)y+(-2)\times(-4)$

$=\mathbf{y^2-6y+8}$

(4) $(a-9)(a+3)$

$=a^2+(-9+3)a+(-9)\times 3$

$=\mathbf{a^2-6a-27}$



**練習7** (1) $(3a+1)(3a+5)$

$=(3a)^2+(1+5)\times 3a+1\times 5$

$=\mathbf{9a^2+18a+5}$

(2) $(4x-1)(4x+5)$

$=(4x)^2+(-1+5)\times 4x+(-1)\times 5$

$=\mathbf{16x^2+16x-5}$

(3) $(2x+7)(2x-9)$

$=(2x)^2+(7-9)\times 2x+7\times(-9)$

$=\mathbf{4x^2-4x-63}$

(4) $(5y-8)(5y-2)$

$=(5y)^2+(-8-2)\times 5y+(-8)\times(-2)$

$=\mathbf{25y^2-50y+16}$

**練習8** (1) $(x+4)^2=x^2+2\times 4\times x+4^2$

$=\mathbf{x^2+8x+16}$

(2) $(y+7)^2=y^2+2\times 7\times y+7^2$

$=\mathbf{y^2+14y+49}$

(3) $(x-2)^2=x^2-2\times 2\times x+2^2$

$=\mathbf{x^2-4x+4}$

(4) $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2=x^2-2\times\dfrac{1}{6}\times x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

$=\mathbf{x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{36}}$

**練習9** (1) $(x-4y)^2=x^2-2\times 4y\times x+(4y)^2$

$=\mathbf{x^2-8xy+16y^2}$

(2) $(-a+8b)^2$

$=(-a)^2+2\times 8b\times(-a)+(8b)^2$

$=\mathbf{a^2-16ab+64b^2}$

注意　$(-a+8b)^2=(a-8b)^2$ である。

(3) $(2x+5y)^2$

$=(2x)^2+2\times 5y\times 2x+(5y)^2$

$=\mathbf{4x^2+20xy+25y^2}$

**練習10** (1) $(x+4)(x-4)=x^2-4^2$

$=\mathbf{x^2-16}$

(2) $(a-7)(a+7)=a^2-7^2$

$=\mathbf{a^2-49}$

**練習11** (1) $(x+2y)(x-2y)=x^2-(2y)^2$

$=\mathbf{x^2-4y^2}$

(2) $(4a-5b)(4a+5b)=(4a)^2-(5b)^2$

$=\mathbf{16a^2-25b^2}$

(3) $\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)=x^2-\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2$

$=\mathbf{x^2-\dfrac{1}{4}y^2}$

(4) $(b+3a)(3a-b)$

$=(3a+b)(3a-b)$

$=(3a)^2-b^2$

$=\mathbf{9a^2-b^2}$

**練習12** (1) $(2x+1)(x+5)$

$=2\times 1\times x^2+(2\times 5+1\times 1)x+1\times 5$

$=\mathbf{2x^2+11x+5}$

(2) $(3x-4)(5x+3)$

$=3\times 5\times x^2+\{3\times 3+(-4)\times 5\}x$
$\qquad +(-4)\times 3$

$=\mathbf{15x^2-11x-12}$

(3) $(4a-1)(2a-7)$

$=4\times 2\times a^2+\{4\times(-7)+(-1)\times 2\}a$
$\qquad +(-1)\times(-7)$

$=\mathbf{8a^2-30a+7}$

**練習13** (1) $(a+b-c)^2$

$=\{(a+b)-c\}^2$

$=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

$=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca}$

(2) $(x+2y+3z)^2$

$=\{(x+2y)+3z\}^2$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)\times 3z+(3z)^2$

$=x^2+4xy+4y^2+6xz+12yz+9z^2$

$=\mathbf{x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx}$

**練習14** (1) $(a+2b+1)(a+2b-3)$

$=\{(a+2b)+1\}\{(a+2b)-3\}$

$=(a+2b)^2-2(a+2b)-3$

$=\mathbf{a^2+4ab+4b^2-2a-4b-3}$

(2) $(2x-y-4)(2x-y+2)$

$=\{(2x-y)-4\}\{(2x-y)+2\}$

$=(2x-y)^2-2(2x-y)-8$

$=\mathbf{4x^2-4xy+y^2-4x+2y-8}$

**練習15** (1) $(x+6)(x-6)-(x+3)(x-4)$

$=(x^2-36)-(x^2-x-12)$

$=\mathbf{x-24}$

(2) $(x+4y)^2+(3x+y)(x-3y)$

$=(x^2+8xy+16y^2)+(3x^2-8xy-3y^2)$

$=\mathbf{4x^2+13y^2}$

**練習16** (1) $(a-3)^2(a+3)^2=\{(a-3)(a+3)\}^2$

$=(a^2-9)^2$

$=\mathbf{a^4-18a^2+81}$

(2) $(2x+3y)^2(2x-3y)^2$
$=\{(2x+3y)(2x-3y)\}^2$
$=(4x^2-9y^2)^2$
$=\mathbf{16x^4-72x^2y^2+81y^4}$

練習17 (1) $(2x+y+z)(2x+y-z)$
$=\{(2x+y)+z\}\{(2x+y)-z\}$
$=(2x+y)^2-z^2$
$=\mathbf{4x^2+4xy+y^2-z^2}$

(2) $(a^2+2ab+3b^2)(a^2-2ab+3b^2)$
$=\{(a^2+3b^2)+2ab\}\{(a^2+3b^2)-2ab\}$
$=(a^2+3b^2)^2-(2ab)^2$
$=(a^4+6a^2b^2+9b^4)-4a^2b^2$
$=\mathbf{a^4+2a^2b^2+9b^4}$

## 2 因数分解 (本冊 p.17～23)

練習1 (1) $12x^3-8x^2y=\mathbf{4x^2(3x-2y)}$
(2) $3a^2x+6ax^2-2ax$
$=\mathbf{ax(3a+6x-2)}$

練習2 (1) $x^2+7x+12=\mathbf{(x+3)(x+4)}$
(2) $x^2-12x+27=\mathbf{(x-3)(x-9)}$
(3) $x^2+2x-8=\mathbf{(x-2)(x+4)}$
(4) $x^2-5x-6=\mathbf{(x+1)(x-6)}$
(5) $a^2-7a+6=\mathbf{(a-1)(a-6)}$
(6) $y^2-y-20=\mathbf{(y+4)(y-5)}$

練習3 (1) $x^2+12x+36=x^2+2\times6\times x+6^2$
$=\mathbf{(x+6)^2}$
(2) $a^2-18a+81$
$=a^2-2\times9\times a+9^2$
$=\mathbf{(a-9)^2}$
(3) $4x^2+4x+1$
$=(2x)^2+2\times1\times2x+1^2$
$=\mathbf{(2x+1)^2}$
(4) $x^2-16xy+64y^2$
$=x^2-2\times8y\times x+(8y)^2$
$=\mathbf{(x-8y)^2}$
(5) $25x^2-70xy+49y^2$
$=(5x)^2-2\times7y\times5x+(7y)^2$
$=\mathbf{(5x-7y)^2}$

練習4 (1) $x^2-36=x^2-6^2$
$=\mathbf{(x+6)(x-6)}$
(2) $a^2-49=a^2-7^2$
$=\mathbf{(a+7)(a-7)}$
(3) $x^2-16y^2=x^2-(4y)^2$
$=\mathbf{(x+4y)(x-4y)}$
(4) $25x^2-64a^2=(5x)^2-(8a)^2$
$=\mathbf{(5x+8a)(5x-8a)}$

練習5 (1) $2x^2+3x+1=\mathbf{(x+1)(2x+1)}$
(2) $4x^2-15x+9=\mathbf{(x-3)(4x-3)}$
(3) $6x^2-5x-6=\mathbf{(2x-3)(3x+2)}$
(4) $3x^2-2xy-y^2=\mathbf{(x-y)(3x+y)}$
(5) $3a^2-14ab+8b^2=\mathbf{(a-4b)(3a-2b)}$
(6) $4a^2+7ab-2b^2=\mathbf{(a+2b)(4a-b)}$

練習6 (1) $3ax^2-24ax+36a$
$=3a(x^2-8x+12)$
$=\mathbf{3a(x-2)(x-6)}$
(2) $\frac{1}{2}a^2x-\frac{9}{2}b^2x=\frac{1}{2}x(a^2-9b^2)$
$=\mathbf{\frac{1}{2}x(a+3b)(a-3b)}$
(3) $-ab^2+a=-a(b^2-1)$
$=\mathbf{-a(b+1)(b-1)}$
参考 $-ab^2+a=a(1-b^2)$
$=a(1+b)(1-b)$
としてもよい。
(4) $x^3y+4x^2y+4xy$
$=xy(x^2+4x+4)$
$=\mathbf{xy(x+2)^2}$

練習7 (1) $x^4-16=(x^2)^2-4^2$
$=(x^2+4)(x^2-4)$
$=\mathbf{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$
(2) $81a^4-b^4$
$=(9a^2)^2-(b^2)^2$
$=(9a^2+b^2)(9a^2-b^2)$
$=\mathbf{(9a^2+b^2)(3a+b)(3a-b)}$

練習8 (1) $x^2-6x+9-4y^2$
$=(x^2-6x+9)-(2y)^2$
$=(x-3)^2-(2y)^2$
$=\{(x-3)+2y\}\{(x-3)-2y\}$
$=\mathbf{(x+2y-3)(x-2y-3)}$
(2) $9a^2-16b^2+40b-25$
$=(3a)^2-(16b^2-40b+25)$
$=(3a)^2-(4b-5)^2$
$=\{3a+(4b-5)\}\{3a-(4b-5)\}$
$=\mathbf{(3a+4b-5)(3a-4b+5)}$

練習9 (1) $(x-2)^2-3(x-2)-10$
$=\{(x-2)+2\}\{(x-2)-5\}$
$=\mathbf{x(x-7)}$



(2) $(a+b)^2+4(a+b)-12$
$=\{(a+b)-2\}\{(a+b)+6\}$
$=\mathbf{(a+b-2)(a+b+6)}$
(3) $(x+2y)^2+4(x+2y)z+3z^2$
$=\{(x+2y)+z\}\{(x+2y)+3z\}$
$=\mathbf{(x+2y+z)(x+2y+3z)}$
(4) $(x+1)^2-6(x+1)+9$
$=\{(x+1)-3\}^2$
$=\mathbf{(x-2)^2}$

練習10 (1) $ac-ad-bc+bd$
$=a(c-d)-(bc-bd)$
$=a(c-d)-b(c-d)$
$=\mathbf{(a-b)(c-d)}$
(2) $ax+bx-ay-by+az+bz$
$=a(x-y+z)+(bx-by+bz)$
$=a(x-y+z)+b(x-y+z)$
$=\mathbf{(a+b)(x-y+z)}$
別解 $ax+bx-ay-by+az+bz$
$=(a+b)x-(a+b)y+(a+b)z$
$=(a+b)(x-y+z)$

## 3 式の計算の利用 (本冊 p.24～27)

練習1 (1) $102^2=(100+2)^2$
$=100^2+2\times2\times100+2^2$
$=\mathbf{10404}$
(2) $72^2-28^2=(72+28)\times(72-28)$
$=100\times44=\mathbf{4400}$
(3) $95\times105=(100-5)\times(100+5)$
$=100^2-5^2=\mathbf{9975}$

練習2 (1) $4321^2-4322\times4320$
$=4321^2-(4321+1)\times(4321-1)$
$=4321^2-(4321^2-1^2)=\mathbf{1}$
(2) $1354\times1358-1359\times1353$
$=(1356-2)\times(1356+2)$
$-(1356+3)\times(1356-3)$
$=(1356^2-2^2)-(1356^2-3^2)$
$=-2^2+3^2=\mathbf{5}$

練習3 $(x-3y)(2x+y)+3y^2$
$=2x^2-5xy-3y^2+3y^2$
$=2x^2-5xy$
$=2\times2^2-5\times2\times\left(-\frac{3}{10}\right)$
$=8+3=\mathbf{11}$

練習4 $ab+b^2+3a+3b$
$=a(b+3)+(b^2+3b)$
$=a(b+3)+b(b+3)$
$=(a+b)(b+3)$
$=(53+47)(47+3)$
$=100\times50=\mathbf{5000}$

練習5 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=\left(\frac{17}{2}\right)^2-2\times18$
$=\frac{289}{4}-36=\mathbf{\frac{145}{4}}$

練習6 中央の数を $n$ とすると
最大の数は $n+1$，最小の数は $n-1$
と表される。
最大の数の2乗から最小の数の2乗をひくと
$(n+1)^2-(n-1)^2$
$=(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)$
$=4n$
よって，最大の数の2乗から最小の数の2乗をひくと，中央の数の4倍になる。

練習7 道の面積は，1辺の長さが $(p+2a)$ m の正方形の面積から，1辺の長さが $p$ m の正方形の面積をひいたものである。
よって $S=(p+2a)^2-p^2$
$=(p^2+4ap+4a^2)-p^2$
$=4ap+4a^2$ ……①
道の中央を通る正方形の1辺の長さは
$(p+a)$ m であるから
$a\ell=a\{4(p+a)\}$
$=4ap+4a^2$ ……②
①，②より $S=a\ell$

## 4 素因数分解 (本冊 p.28～30)

練習1 素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

練習2 (1) $24=\mathbf{2^3\times3}$ (2) $405=\mathbf{3^4\times5}$
(3) $756=\mathbf{2^2\times3^3\times7}$

練習3 (1) $225=3\times3\times5\times5=(3\times5)^2=15^2$
よって，225は15の平方である。
答 15
(2) $7056=2\times2\times2\times2\times3\times3\times7\times7$
$=(2\times2\times3\times7)^2=84^2$
よって，7056は84の平方である。
答 84