例題 3　絶対値の性質

次の問いに答えよ．

(1)　$|a|\geqq a$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　$|ab|=|a||b|$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$a\geqq 0$，$b<0$ とする．

解　(1)　$a\geqq 0$ のとき，$|a|=a$ より，等号が成り立つ．

$a<0$ のとき，$|a|=-a>0$　よって，$|a|=-a>a$ より，成り立つ．

(2)　$ab\leqq 0$ より，$|ab|=-ab$，$|a|=a$，$|b|=-b$ より，$|a||b|=-ab$

ゆえに，等式が成り立つ．

6　例題3の(2)の等式が，次の場合にも成り立つことを証明せよ．

(1)　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$　　(2)　$a<0$，$b\geqq 0$　　(3)　$a<0$，$b<0$

7　次の式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$|a|\geqq -a$　　(2)　$|a|^2=a^2$

8　$b\neq 0$ のとき，$|ab|=|a||b|$ を利用して，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ を証明せよ．

例題 4　平方根

次の問いに答えよ．

(1)　25の平方根を求めよ．　　(2)　$\sqrt{28}$ を $a\sqrt{b}$ の形で表せ．

(3)　$\sqrt{a^2}$ の根号をはずせ．

解　(1)　正の数，負の数の2つがある．$\pm\sqrt{25}=\pm\mathbf{5}$

(2)　$\sqrt{28}=\sqrt{2^2\cdot 7}=\mathbf{2\sqrt{7}}$

(3)　$a\geqq 0$ のとき，$\sqrt{a^2}=\boldsymbol{a}$　　$a<0$ のとき，$\sqrt{a^2}=\boldsymbol{-a}$ ($\sqrt{a^2}=|a|$ と同じ)

9　次の数の平方根を求めよ．

(1)　49　　(2)　144　　(3)　$\dfrac{16}{9}$　　(4)　15　　(5)　33

10　$\sqrt{4^2}$，$\sqrt{(-5)^2}$，$(\sqrt{6})^2$ の値をそれぞれ求めよ．

11　次の数を $a\sqrt{b}$ の形で表せ．

(1)　$\sqrt{27}$　　(2)　$\sqrt{20}$　　(3)　$\sqrt{32}$　　(4)　$\sqrt{75}$　　(5)　$\sqrt{112}$

12　次の場合について，$\sqrt{(x-1)^2}$ の根号をはずせ．

(1)　$x<1$　　(2)　$x\geqq 1$

●ポイント

①　$\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|a|}$　　②　$a>0$，$b>0$ のとき，$\boldsymbol{\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}}$

例題 5　根号を含む式の計算

次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt{45}-\sqrt{80}-\sqrt{5}$　　(2)　$(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2$

解　(1)　与式$=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-\sqrt{5}=(3-4-1)\sqrt{5}=\mathbf{-2\sqrt{5}}$

(2)　与式$=(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2$ ←——$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を利用

$=5+4\sqrt{10}+8=\mathbf{13+4\sqrt{10}}$

13　次の式を計算せよ．

(1)　$\sqrt{27}+\sqrt{12}$　　(2)　$\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{72}$

(3)　$2\sqrt{32}-\sqrt{18}+3\sqrt{8}$　　(4)　$3\sqrt{3}+2\sqrt{\dfrac{27}{4}}-\sqrt{48}$

(5)　$(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$　　(6)　$(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

(7)　$(2\sqrt{5}-\sqrt{6})(2\sqrt{5}+\sqrt{6})$　　(8)　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

(9)　$(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$　　(10)　$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

例題 6　分母の有理化

次の式の分母を有理化せよ．

(1)　$\dfrac{3}{\sqrt{6}}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

解　(1)　$\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

14　次の式の分母を有理化せよ．

(1)　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　　(2)　$\dfrac{9}{2\sqrt{6}}$　　(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

(5)　$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}$　　(6)　$\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$　　(7)　$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$　　(8)　$\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

15　次の計算をせよ．

(1)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

●ポイント

①　$a>0$，$b>0$ のとき，$\boldsymbol{m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}}$，$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$，$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

②　**〔分母の有理化〕**　分母が $\sqrt{a}$ の形の場合——→分母，分子に $\sqrt{a}$ を掛ける．

分母が $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ の形の場合——→分母，分子に $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ を掛ける．

例題 7　式の値

次の問いに答えよ．

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$ のとき，x^2+y^2 の値を求めよ．

(2)　$\sqrt{6}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a^2-b^2 の値を求めよ．

解　(1)　$x+y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{6}$，

$xy=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=3$ より，

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{6})^2-2\cdot3=\mathbf{18}$

(2)　$2<\sqrt{6}<3$ より，$\sqrt{6}$ の整数部分は 2 となる．よって，$a=2$，$b=\sqrt{6}-2$

$a^2-b^2=2^2-(\sqrt{6}-2)^2=4-(10-4\sqrt{6})=\mathbf{4\sqrt{6}-6}$

16　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2+y^2　　(4)　x^4+y^4

17　$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x-\dfrac{1}{x}$　　(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$

18　$5-\sqrt{2}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a^2+b^2 の値を求めよ．

例題 8　二重根号のはずし方

次の二重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　(2)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　(3)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}$

解　$a>b>0$ のとき，$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ であることを利用する．

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1+2\sqrt{3\cdot1}}=\mathbf{\sqrt{3}+1}$

(2)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{3\cdot2}}=\mathbf{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4-\dfrac{2\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}$

19　次の二重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　(2)　$\sqrt{10-2\sqrt{21}}$　　(3)　$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

(4)　$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(5)　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$　　(6)　$\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

(7)　$\sqrt{7-\sqrt{24}}$　　(8)　$\sqrt{6+\sqrt{20}}$　　(9)　$\sqrt{4+\sqrt{7}}$

●ポイント

①　$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a>b)$　和がA，積がBとなる 2 つの正の数 a，b を求める．

混合問題

A

1　次の小数を分数になおせ．

(1)　$0.\dot{4}\dot{2}$　　(2)　$0.\dot{5}3\dot{1}$　　(3)　$0.4\dot{2}1\dot{6}$

2　次の場合について，$|x+2|-|x-4|$ を簡単にせよ．

(1)　$x<-2$　　(2)　$-2\leqq x<4$　　(3)　$x\geqq4$

3　次の式を計算せよ．

(1)　$(3\sqrt{2}+\sqrt{7})(3\sqrt{2}-\sqrt{7})$　　(2)　$(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)^2$　　(3)　$\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$　　(5)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$　　(6)　$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

4　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a-\sqrt{3}b$ の値を求めよ．

5　次の二重根号をはずせ．

(1)　$\sqrt{10+2\sqrt{21}}$　　(2)　$\sqrt{8-\sqrt{60}}$　　(3)　$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

B

6　$a\neq0$ とする．$x=a^2+1$ のとき，次の場合について，$\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}$ を a の式で表せ．

(1)　$a<-1$　　(2)　$-1\leqq a<1$ $(a\neq0)$　　(3)　$a\geqq1$

7　$x+y+z=2\sqrt{3}$，$xy+yz+zx=-3$，$xyz=1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x^2+y^2+z^2$　　(2)　$x^3+y^3+z^3$

8　$x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$　　(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(4)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}$

■ヒント

6　x に a^2+1 を代入すると，$\sqrt{(\quad)^2}$ の形になる．$\sqrt{(\quad)^2}$ は安易に $\sqrt{\quad}$ をはずしてはいけない．

7　与式を，$x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz で表すことを考える．

8　まず，$x+\dfrac{1}{x}$ の値を求め，それをもとに(2)〜(4)の値を求める．

3 1次不等式

例題 1 不等式の表し方

次の数量の間の大小関係を不等式で表せ．

(1) xを5倍して7を引いた数は，xの2倍より大きい．

(2) ある学生の3回のテストの点はa点，b点，c点で，その平均点はm点以下である．

解 (1) 大きい，小さいを表すときは，$>$，$<$を使う．$\mathbf{5x-7>2x}$

(2) 以上，以下を表すときは，$\geqq$，$\leqq$を使う．$\mathbf{\dfrac{a+b+c}{3}\leqq m}$

1 次の数量の間の大小関係を不等式で表せ．

(1) xを2倍して5を足した数は，xの3倍より大きい．

(2) aとbの和の4倍は，aからbの7倍を引いた数以上である．

(3) 1個agのせっけん20個をbgの箱に入れても，全体で1000gに満たない．

(4) 30kmの道のりを自転車で行くのに，毎時$a$kmの速さで走るとy時間以上かかる．

(5) 1個100円のかきと1個150円のりんごをそれぞれx個とy個買って，z円のケースに入れてもらったら，2500円以下におさまった．

例題 2 不等式の性質

$a>b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け．

(1) $a-3$□$b-3$　(2) $\dfrac{a}{3}$□$\dfrac{b}{3}$　(3) $-2a$□$-2b$

解 (1) 両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない．$>$

(2) 両辺を同じ正の数で割っても，不等号の向きは変わらない．$>$

(3) 両辺に同じ負の数を掛けると，不等号の向きが変わる．$<$

2 $a<b$のとき，次の□にあてはまる不等号を書け．

(1) $a+6$□$b+6$　(2) $a-10$□$b-10$

(3) $-7a$□$-7b$　(4) $-2+5a$□$-2+5b$

(5) $\dfrac{3+4a}{7}$□$\dfrac{3+4b}{7}$　(6) $\dfrac{5-2a}{3}$□$\dfrac{5-2b}{3}$

●ポイント

① 数量の間の大小関係を不等号を使って表した式を**不等式**といい，不等号の左側の部分を**左辺**，右側の部分を**右辺**といい，左辺と右辺を合わせて**両辺**という．

② 〔**不等式の性質**〕 (1) $A<B$ならば，$A+C<B+C$，$A-C<B-C$

(2) $A<B$，$C>0$ならば，$AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

(3) $A<B$，$C<0$ならば，$AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

3 $x>y$のとき，次の2式ではどちらが大きいか．

(1) $\dfrac{x}{3}+8$，$\dfrac{y}{3}+8$　(2) $10-0.6x$，$10-0.6y$　(3) $\dfrac{7-x}{2}$，$\dfrac{7-y}{2}$

4 次のような大小関係があるとき，aとbの大小関係を不等号を使って表せ．

(1) $a-4>b-4$　(2) $a+2<b+2$　(3) $-6a>-6b$

(4) $9-4a<9-4b$　(5) $\dfrac{a}{5}+3<\dfrac{b}{5}+3$　(6) $6-\dfrac{a}{2}<6-\dfrac{b}{2}$

例題 3 基本的な不等式の解法

次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

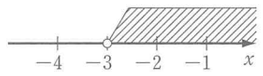
(1) $x+8>5$　(2) $5x\leqq 15$　(3) $-\dfrac{x}{3}>2$

解 (1) $x+8>5$

両辺から8を引く．

$x+8-8>5-8$

$\mathbf{x>-3}$

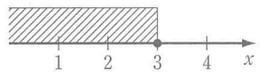


(2) $5x\leqq 15$

両辺を5で割る．

$\dfrac{5x}{5}\leqq\dfrac{15}{5}$

$\mathbf{x\leqq 3}$

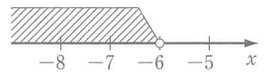


(3) $-\dfrac{x}{3}>2$

両辺に-3を掛ける．

$-\dfrac{x}{3}\times(-3)<2\times(-3)$

$\mathbf{x<-6}$



5 次の不等式を解け．また，解の集合を数直線上に表せ．

(1) $x+3>7$　(2) $x-1.7<1.8$　(3) $-9+x\geqq -3$

6 次の不等式を解け．

(1) $x+2<1$　(2) $x-8\leqq 5$　(3) $x+\dfrac{2}{3}>\dfrac{5}{6}$

(4) $-2.5+x\geqq 0.5$　(5) $9x<27$　(6) $-8x\leqq 32$

(7) $-7x>-63$　(8) $13x\leqq -169$　(9) $-15x<-24$

7 次の不等式を解け．

(1) $\dfrac{x}{4}>3$　(2) $-\dfrac{x}{2}<5$　(3) $-\dfrac{x}{7}\geqq -4$

(4) $\dfrac{1}{4}x\leqq -2$　(5) $-\dfrac{3}{8}x\leqq\dfrac{5}{12}$　(6) $-\dfrac{2}{9}x>-\dfrac{16}{27}$

●ポイント

① 不等式のすべての解を求めることを，その不等式を**解く**という．

② 不等式を解くには，不等式の性質を利用して，左辺をxだけにする．

③ 不等式の両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりすると，不等号の向きが変わる．

④ 不等式の解の集合を数直線上に表すとき，aを含まない場合($x>a$，$x<a$の場合)はaの点を「○」で，aを含む場合($x\geqq a$，$x\leqq a$の場合)はaの点を「●」で表す．

例題 4　1次不等式の解法

次の1次不等式を解け．

(1) $5x-2>3x+4$　　(2) $2(x+4)-5x\leqq 14$

解 (1)
$5x-2>3x+4$ ← 移項する．
$5x-3x>4+2$ ← 両辺を整理する．
$2x>6$ ← 両辺を2で割る．
$\boldsymbol{x>3}$

(2)
$2(x+4)-5x\leqq 14$ ← かっこをはずす．
$2x+8-5x\leqq 14$ ← 移項する．
$2x-5x\leqq 14-8$ ← 両辺を整理する．
$-3x\leqq 6$ ← 両辺を -3 で割る．不等号の向きが変わる．
$\boldsymbol{x\geqq -2}$

8 次の1次不等式を解け．

(1) $4x-8>2x$　　(2) $12-3x\leqq 4x$
(3) $5-3x\leqq 7-10x$　　(4) $7x-30<10x-9$
(5) $25x-38\geqq 49x-18$　　(6) $65+36x<11+27x$
(7) $12x+11<20x-7$　　(8) $200-5x\geqq 3x+64$
(9) $5(3x-2)<-1$　　(10) $2x-(5x+3)+12\geqq 0$
(11) $29-7(8-3x)\leqq 18x$　　(12) $3(x-2)>4(x+1)-5$
(13) $2(x-2)>3(4-x)+4$　　(14) $3(2x-3)-2(1+5x)\geqq 13$
(15) $4(2x-5)-3x>2-2(x-3)$　　(16) $8x-2(3x+5)\leqq 3x-2(x-10)$

9 次の1次不等式を解け．

(1) $2.1-x>0.5x$　　(2) $0.4x-1.1<0.7x+3.1$
(3) $0.45x-0.36<0.38x+0.27$　　(4) $0.11x+0.4\geqq 0.96+0.2x$
(5) $3.2x+4.2\geqq 2(x-0.6)+1.8$　　(6) $0.3(4x+0.6)<1.5x+0.63$
(7) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}x\leqq\frac{1}{3}x$　　(8) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}>\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
(9) $3-\frac{5x-1}{3}>2x+1$　　(10) $\frac{3x+1}{2}>\frac{2x-3}{5}$
(11) $\frac{3}{4}x<\frac{2x-1}{2}+\frac{3}{4}$　　(12) $\frac{-4x+1}{2}-\frac{x}{6}\geqq\frac{3x-1}{4}+\frac{9}{2}$

●ポイント

① $ax+b>0$ のように，移項して整理すると左辺が x の1次式になる不等式を**1次不等式**という．
② 不等式の両辺に同じ数を足しても，両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない．よって，不等式も方程式の場合と同じように移項ができる．
③ 両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりするときは，不等号の向きに注意する．
④ 小数を含む不等式は，両辺に10，100などを掛けて，係数を整数にする．
⑤ 分数を含む不等式は，両辺に分母の最小公倍数を掛けて，分母をはらう．

10 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2(3x+2)+a>9x$ の解が $x<3$ のとき，a の値を求めよ．
(2) x についての方程式 $7x-2(x-a)=8$ の解が正になるような a の値の範囲を求めよ．

例題 5　1次不等式の応用

1冊110円のノートと1冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を1000円以下にしたい．1冊110円のノートをできるだけ多く買うには，それぞれ何冊買えばよいか．

解 110円のノートを x 冊買うとすると，80円のノートは $(10-x)$ 冊買うことになる．

よって，不等式は，$110x+80(10-x)\leqq 1000$　これを解くと，$x\leqq 6\frac{2}{3}$

$6\frac{2}{3}$ 以下の最大の自然数は6であるから，110円のノートは**6冊**

$10-6=4$ であるから，80円のノートは**4冊**

11 次の問いに答えよ．

(1) 1個の値段がそれぞれ160円，120円のりんごとみかんを合わせて15個入れた果物かごを作る．かご代150円を含めて，代金の合計が2400円をこえないようにしたい．りんごをできるだけ多く入れるとすると，それぞれ何個入れればよいか．
(2) 野球選手カードをAは46枚，Bは14枚持っている．AがBに何枚かあげても，Aの残りの枚数がBの枚数の2倍より多くなるようにしたい．AはBに何枚まであげられるか．

12 次の問いに答えよ．

(1) A店では，定価が1個800円のある商品を10％引きで売っている．B店では，同じ商品を1ダースまでは定価どおりの800円で，それをこえた分は1個につき定価の17％引きで売っている．この商品を何個以上買うと，B店で買う方がA店で買うより安くなるか．
(2) 5％の食塩水と8％の食塩水がある．5％の食塩水800gと8％の食塩水を何gか混ぜ合わせて6％以上の食塩水を作りたい．8％の食塩水を何g以上混ぜればよいか．

13 次の問いに答えよ．

(1) A地から15km離れたB地まで歩いた．はじめは平らな道を毎時5km，途中から上り坂を毎時3kmの速さで歩いた．所要時間が4時間以内のとき，平らな道は何km以上あったか．
(2) ある美術館の入館料は1人700円で，30人以上の団体は2割引きとなる．この美術館に30人に満たない団体が入館するとき，30人の団体扱いとして入館する方が，通常の料金で入館するより安くなるのは，人数が何人以上のときか．

●ポイント

① 問題に述べられた関係から不等式をつくって解き，解の中から条件に合うものを選択する．

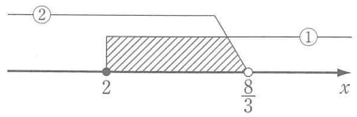
例題 6　連立不等式

連立不等式 $\begin{cases} 2x-1\geqq 3 \\ 3x+4<12 \end{cases}$ を解け．

解　$2x-1\geqq 3$ を解いて，$x\geqq 2$ ……①

$3x+4<12$ を解いて，$x<\frac{8}{3}$ ……②

①，②の共通部分をとって，$\boldsymbol{2\leqq x<\frac{8}{3}}$



14　次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x-3<5 \\ 3x+2\geqq 8 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+1\geqq 2x-3 \\ 4x-3>7x-9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7(x+2)>4x+5 \\ 3(2x+1)\geqq 4x+7 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x+1\leqq 5(x-1) \\ 5(x-2)+1\leqq 3(x+1) \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 0.2x-1<0.7x-2 \\ 2.3x-1.4<0.7(2x+7) \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 0.25x-0.18\geqq 0.6-0.14x \\ 3x+1\geqq 5x-1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \frac{8x+12}{7}<x+\frac{3}{2} \\ 5-6x>-x-5 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} \frac{11}{4}x-\frac{3}{2}>2x-5 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\leqq -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$

15　次の不等式を解け．

(1) $3x+1<x-3<4x+9$　　(2) $3(x-1)-1<5(x+1)-6<2(x-2)+5$

16　次の問いに答えよ．

(1)　1冊120円のノートと1冊80円のノートを合わせて10冊買って，その代金を900円以上1000円以下にしたい．1冊120円のノートは何冊以上何冊以下買えばよいか．

(2)　A地から20km離れたB地まで歩いた．はじめは時速6km，途中から時速5kmで歩くと，3時間30分以上3時間40分以下で着いた．時速6kmで歩いた道のりは何km以上何km以下か．

(3)　ある店では，商品に原価の25％の利益を見込んで定価をつける．定価から300円値引きして売っても，なお原価の10％以上15％以下の利益が得られるのは，原価がどのような範囲のときか．

17　x についての連立不等式 $\begin{cases} 4x-5\leqq 9+2x \\ 3x-2\leqq 6x-a \end{cases}$ を満たす整数 x の個数が5個となるような a の値の範囲を定めよ．

●ポイント

①　2つ以上の不等式を組み合わせたものを**連立不等式**という．

②　連立不等式を解くには，それぞれの不等式を解いて，それらの解の共通の範囲を求める．

③　連立不等式は必ず解をもつとは限らない．

④　$A<B<C$ のとき，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ が同時に成り立つので，これを連立不等式として解けばよい．

例題 7　絶対値を含む方程式

次の方程式を解け．

(1)　$|x-1|=3$　　(2)　$|x+1|=2x$

解　(1)　(i)　$x\geqq 1$ のとき，$x-1=3$ より，$x=4$

(ii)　$x<1$ のとき，$-(x-1)=3$ より，$x=-2$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 4}$

〔別解〕　$|(\quad)|=a$（a は定数，$a>0$）は，$(\quad)=\pm a$ として解くこともできる．

(2)　(i)　$x\geqq -1$ のとき，$x+1=2x$ より，$x=1$　これは $x\geqq -1$ に適する．

(ii)　$x<-1$ のとき，$-(x+1)=2x$ より，$x=-\frac{1}{3}$　これは $x<-1$ に適さない．

よって，$\boldsymbol{x=1}$

18　次の方程式を解け．

(1)　$|x|=2$　　(2)　$|x+1|=4$　　(3)　$|x-3|=8$

(4)　$|3x-2|=6$　　(5)　$|2x-1|-6=5$　　(6)　$3|x-1|+5=7$

19　次の方程式を解け．

(1)　$|x+5|=2x$　　(2)　$|x-1|=2x+1$　　(3)　$|3x-4|=x+8$

例題 8　絶対値を含む不等式

次の不等式を解け．

(1)　$|x+1|<4$　　(2)　$|x+2|>2x$

解　(1)　与えられた不等式は，$-4<x+1<4$ と同じである．

$-4<x+1$ より，$x>-5$　$x+1<4$ より，$x<3$

よって，$\boldsymbol{-5<x<3}$

〔注〕　$|(\quad)|<a \Longleftrightarrow -a<(\quad)<a$，$|(\quad)|>a \Longleftrightarrow (\quad)>a$，$(\quad)<-a$

ただし，a は定数で，$a>0$

(2)　$x\geqq -2$ のとき，$x+2>2x$ より，$x<2$　よって，$-2\leqq x<2$ ……①

$x<-2$ のとき，$-(x+2)>2x$ より，$x<-\frac{2}{3}$　よって，$x<-2$ ……②

①，②のどちらかを満たしていればよいから，$\boldsymbol{x<2}$

20　次の不等式を解け．

(1)　$|x|\leqq 5$　　(2)　$|x+2|<3$　　(3)　$|x-1|\geqq 2$

(4)　$|2x+1|<4$　　(5)　$|3-x|+2>7$　　(6)　$2|5x-2|-5\leqq 3$

21　次の不等式を解け．

(1)　$|x+6|>3x$　　(2)　$|2x-1|\leqq x+2$　　(3)　$x+|x+1|>4x-3$

●ポイント

①　絶対値を含む方程式，不等式では，絶対値記号をはずして解いた解のうち，適するものを選ぶ．

混合問題

A

1 次の1次不等式を解け．

(1) $3x+11<x-3$　　(2) $2x-9\geqq 7x-34$

(3) $9-(x-1)\geqq 3(2-x)$　　(4) $0.75x-0.3>1.21x+1.08$

(5) $\frac{4}{5}x+3\leqq\frac{1}{2}(3x-1)+7$　　(6) $\frac{3x-1}{4}<\frac{2-5x}{3}+\frac{1}{6}$

2 次の不等式を解け．

(1) $\begin{cases}3x-6<4x-2\\0.2(x+6)\geqq 1.2x+3.2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4(x+2)\leqq 5x+9\\\frac{11}{12}-\frac{1}{4}x<\frac{1}{3}\end{cases}$

(3) $2x+1<\frac{x}{3}-1<x+2$　　(4) $\frac{x-1}{3}-1<\frac{5x-4}{6}-\frac{1}{2}<\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}$

3 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|5x-6|=14$　　(2) $|2x-1|=x+3$

(3) $2|3x-1|\geqq 5$　　(4) $|3x+2|<-x$

4 ワイングラスを1個240円で何個か仕入れ，これを1個400円で売ったとき，そのうち20個が割れても15000円以上の利益が上がるようにしたい．ワイングラスを何個以上仕入れればよいか．

B

5 xについての連立不等式 $\begin{cases}2x-5>x-a\\3(x+a)>7x-2\end{cases}$ を解け．

6 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-2|+|2x-1|=5x$　　(2) $2|x|+1\leqq|x+3|+3x$

7 倉庫の中に同じ大きさの商品が320個入っている．この商品を，50個まで積めるトラックAと，35個まで積めるトラックBを合わせて8台使って全部運び出したい．トラック1台の運賃は，A，Bそれぞれ15000円，10000円である．運賃の合計を100000円未満にするとき，次の問いに答えよ．

(1) トラックA，トラックBはそれぞれ何台使うことになるか．

(2) 運賃の合計は何円になるか．

■ヒント

5 aの値によって，解をもつ場合ともたない場合がある．

6 (1) $x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqq x<2$，$x\geqq 2$ の3つの場合に分けて考える．

4 集合と命題

例題 1　集合と要素

正の偶数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 2□A　　(2) 3□A

解 (1) **2∈A**　(2) **3∉A**

1 正の奇数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 7□A　(2) 8□A　(3) 12□A　(4) 13□A

2 6の正の約数全体の集合をAとする．次の□の中に，∈または∉のいずれかを書き入れよ．

(1) 2□A　(2) 3□A　(3) 4□A　(4) 5□A

例題 2　集合の表し方

次の問いに答えよ．

(1) 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

① 9の正の約数全体の集合　　② $\{x\mid x$は40以下の自然数で8の倍数$\}$

(2) 集合$\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 100\}$を，要素の条件を述べる方法で表せ．

解 (1) ① **$\{1,\ 3,\ 9\}$**　② **$\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40\}$**

(2) **$\{x\mid x$は100以下の正の偶数$\}$**　〔別解〕 **$\{2x\mid x$は整数，$1\leqq x\leqq 50\}$**

3 次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ．

(1) 50以下の正の整数で11の倍数全体の集合

(2) 48の正の約数全体の集合

(3) 300以下の自然数で，4で割ると2余る数全体の集合

(4) $\{x\mid x$は正の整数で5の倍数$\}$

(5) $\{n\mid n=2m,\ m$は自然数，$m\leqq 5\}$

(6) $\{2n-1\mid n$は自然数$\}$

4 次の集合を，要素の条件を述べる方法で表せ．

(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$　　(2) $\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots\}$

(3) $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\ 99\}$　　(4) $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

●ポイント

① ある条件を満たすものの集まりを**集合**といい，集合に含まれる1つ1つのものをその集合の**要素**という．aが集合Aの要素であるとき，aは集合Aに**属する**といい，$a\in A$ または $A\ni a$ と表す．

② 集合の表し方には，$\{○,\ ○,\ \cdots\cdots,\ ○\}$のように要素を書き並べる方法と，$\{x\mid \boxed{x\text{の満たす条件}}\}$のように要素の条件を述べる方法がある．